Mechanika

Rzeszów University of Technology

1 lutego 2023

Vitalii Dugaev

Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
Budynek L, pokój L-27.111B, tel. 17-865 1917
Email: vdugaev@prz.edu.pl

Strona domowa:
https://dugaev.v.prz.edu.pl/ → Lectures

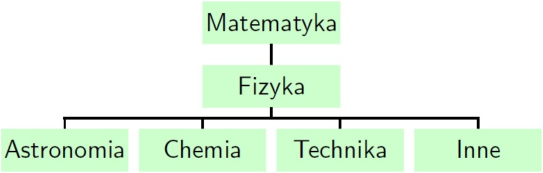
Literatura do Fizyki I i Fizyki II

- D. Halliday, R. Resnik, J. Walker. Podstawy fizyki, tom 1,2,3.
- Fizyka dla szkół wyższych, tom 1,2,3. Openstax Polska.
- K. Chlędowska, R. Sikora. Wybrane problemy fizyki z rozwiązaniami. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej.
- M. Massalska, J. Massalski. Fizyka dla inżynierów.
- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, Feynmana wykłady z fizyki.
- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Mechanika.
- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Teoria pola.
- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Mechanika kwantowa.
- H. D. Young, R. A. Freedman, University Physics.
- Berkeley Physics Course.

Literatura do Mechaniki

- D. Halliday, R. Resnik, J. Walker. Podstawy fizyki, tom 1.
- Fizyka dla szkół wyższych, tom 1. Openstax Polska.
- K. Chlędowska, R. Sikora. Wybrane problemy fizyki z rozwiązaniami. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej.
- M. Massalska, J. Massalski. Fizyka dla inżynierów.
- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Mechanika.
- H. D. Young, R. A. Freedman. University Physics.
- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, Mechanika (Kurs fizyki Berkeley, tom 1)

- Badania własności ciał i istoty zjawisk fizycznych poprzez obserwacje - eksperyment
- Znajdowania podstawowych praw przyrody - teoria
- Fizyka komputerowa: teoria - eksperyment komputerowy
- Język fizyki - matematyka



Wielkości fizyczne

Każda dają się zmierzyć wielkość nazywamy wielkoscią fizyczną

Wielkości fizyczne dzielimy na

- podstawowe (długość, temperatura)

- pochodne (objętość. prędkość, energia)

Używamy Międzynarodowego Układu Jednostek SI (système international)

Jednostki SI

Długość - metr m

Masa - kilogram kg

Czas - sekunda s

Temperatura termodynamiczna - Kelwin K

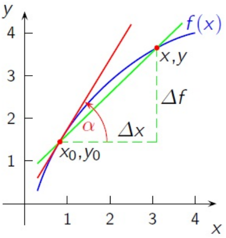
Natężenie prądu - Amper A

itd.

Jednostki podstawowe

Wielkość	Jednostka	Skrót
Długość	metr	m
Masa	kilogram	kg
Czas	sekunda	s
Temperatura termodynamiczna	kelwin	K
Natężenie prądu elektrycznego	amper	A
Światłość	kandela	cd
Ilość substancji	mol	mol
Jednostki uzupełniające		
Kąt płaski	radian	rad
Kąt bryłowy	steradian	sr

Czynnik	Przedrostek	Symbol
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hekto	h
10^{1}	deka	da
10^{-1}	decy	d
10^{-2}	centy	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f



- Pochodna $f'(x_0)$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest granicą ilorazu różnicowego

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

$f(x)$ - funkcja

x - zmienna

lim - granica

Δf, Δx - różnice

df, dx - różniczki

Obliczenie pochodnej

funkcja	pochodna
stała C	0
e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	x^{-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$C\,f(x)$	$C\,f'(x)$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$f[g(x)]$	$f'[g(x)]g'(x)$

Przykłady obliczenia pochodnej

- Przykład 1

$$f(x) = ax^n = \frac{5}{\sqrt{x}} = 5x^{-1/2}$$

$$f'(x) = anx^{n-1} = 5\Big(-\frac{1}{2}\Big)x^{-3/2} = -\frac{5}{2}\,x^{-3/2}$$

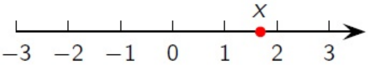
- Przykład 2

$$f(x)\,g(x) = \sin(ax)\,e^{-bx}$$

$$\begin{aligned}
&[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \\
&= a\cos(ax)e^{-bx} + \sin(ax)(-b)e^{-bx} \\
&= [a\cos(ax) - b\sin(ax)]\,e^{-bx}
\end{aligned}$$

- **Położenie i przemieszczenie**

  Przemieszczenie: $\Delta x = x_2 - x_1$ (wielkość wektorowa)

- **Prędkość**

  Prędkość srednia $v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

  Prędkość chwilowa $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

- **Przyspieszenie**

  Przyspieszenie srednie $a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

  Przyspieszenie chwilowe $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

  $a = \frac{d}{dt} v = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

  Jednostki: $[v] = m/s, \quad [a] = m/s^2$

- Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem

$$a = const$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

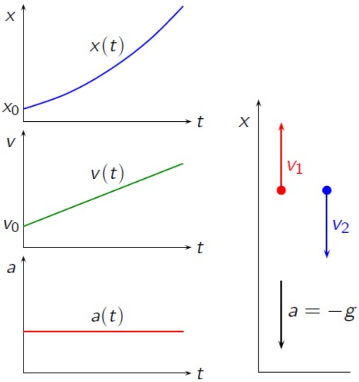
$a = \frac{dv}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$

- Przykład:

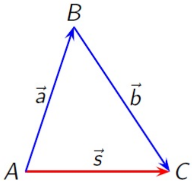
Spadek swobodny

$$a = -g$$
$$v = v_0 - gt$$
$$x = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

gdzie $g \simeq 9,81\ m/s^2$ - przyspieszenie ziemskie



- Skalar - wielkość fizyczna, która jest scharakteryzowana tylko przez wartość (temperatura, masa, czas)
- Wektor - wielkość fizyczna, która ma wartość i kierunek (przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie)



Dodawanie wektorów: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

Przemienność: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Łączność: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

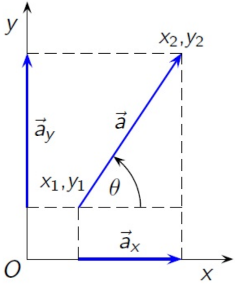
Odejmowanie wektorów: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Przedstawienie wektora przez składowe:

$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$, gdzie $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ - składowe wektora

$$a_x = a\cos\theta\ , \quad a_y = a\sin\theta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ , \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

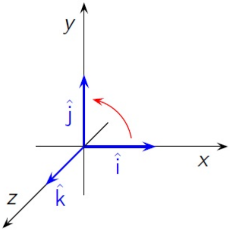


Wektory jednostkowe

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ - **wektory jednostkowe**. Długość tych wektorów jest równa 1.

Przedstawienie wektora przez składowe z użyciem wektorów jednostkowych

$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

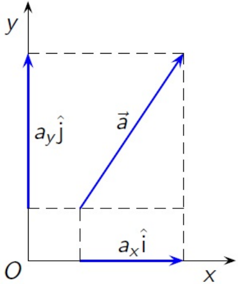


Algebraiczne dodawanie wektorów

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

Równania dla składowych

$$r_x = a_x + b_x$$
$$r_y = a_y + b_y$$
$$r_z = a_z + b_z$$

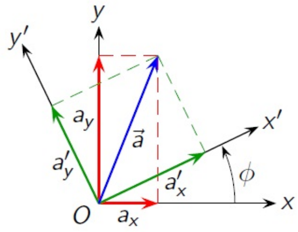


Wektory a różne układy współrzędnych

Przekształcenie składowych wektora przy obrocie wokół osi z na kąt φ

$$a'_x = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi$$
$$a'_y = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$$

Taka zmiana składowych $(a_x, a_y) \rightarrow (a'_x, a'_y)$ przy transformacji współrzędnych charakteryzuje $\vec{a}$ jako wektor i dlatego stanowi definicję wektora w matematyce



- **Iloczyn skalarny**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi \text{ - skalar}$$

- Mnożenie wektora $\vec{a}$ przez skalar s:

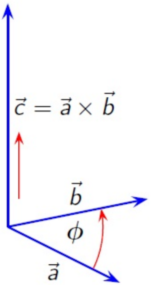
  $s\vec{a}$ - wektor o długości $s|a|$ w kierunku $\vec{a}$ przy $s > 0$ i w przeciwnym do $\vec{a}$ kierunku przy $s < 0$

- **Iloczyn wektorowy**

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \text{ - wektor}$$

  Długość wektora c: $c = ab\sin\phi$

  Kierunek wektora $\vec{c}$ - wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do $\vec{a}$ i do $\vec{b}$; obrót od $\vec{a}$ do $\vec{b}$ - w kierunku przeciwnym do ruchu strzałki zegara (dodatni kierunek obrotu)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ przy } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ przy } \vec{a} || \vec{b}$$

Obliczenie przez składowe wektorów

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Jesli $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, to

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Inaczej można znaleźć składowe wektora $\vec{c}$ za pomocy wyznacznika macierzy

$$\vec{c} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Kinematyka ruchu cząstki w 3D przestrzeni

- Wektor położenia $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
- Przemieszczenie: $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$
- Prędkość średnia

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\hat{k}$$

- Prędkość chwilowa

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

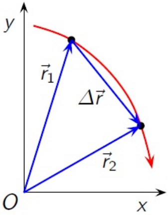
gdzie $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$

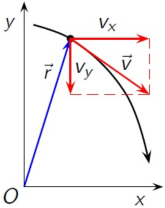
- Przyspieszenie

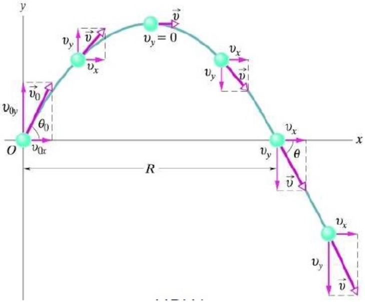
$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

gdzie $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$,







Ruch jednostajny po okręgu

Przyspieszenie dośrodkowe: $a = \frac{v^2}{r}$

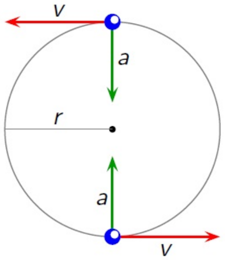
Wyprowadzenie:

$$\Delta v = v\phi$$

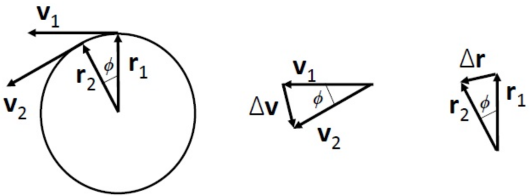
$$\Delta r = r\phi = v\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{r\phi}{v}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\phi \cdot v}{r\phi} = \frac{v^2}{r}$$



Okres ruchu po okręgu: $T = \frac{2\pi r}{v}$



Układ $x'y'$ porusza się ze stałą prędkością $\vec{v}_w$ względem układu xy

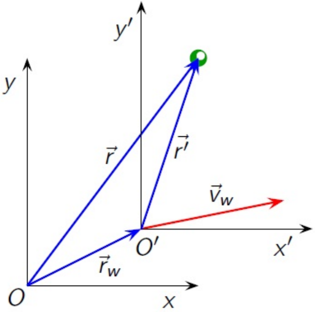
$$\vec{r} = \vec{r}_w + \vec{r}\,'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_w}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}_w + \vec{v}\,'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}\,'$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,'$$

- **transformacja Galileusza**



Jeśli na poruszające się ciała nie działają żadne siły, to jego ruch trwa bez końca (Galileusz)

Teoria Newtona

- Mechanika klasyczna opisuje świat ciał makroskopowych poruszających się znacznie wolniej od prędkości światła
- Mechanika kwantowa opisuje świat mikroskopowy
- Teoria względności Einsteina opisuje ruch z wielkimi prędkościami $\sim c$
- Przyczyna przyspieszenie ciała - siła $\vec{F}$
- Jeśli na ciało działa kilka sił, to ich suma wektorowa nosi nazwę siły wypadkowej $\vec{F}_{wyp}$

I zasada dynamiki Newtona

Jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zeru, $\vec{F}_{wyp} = 0$, to nie zmienia się jego prędkość

Inercjalny układ odniesienia - układ, w którym spełnione są zasady dynamiki Newtona

II zasada dynamiki Newtona

- Jeśli na ciało działa siła wypadkowa $\vec{F}$, to ciało porusza się z przyspieszeniem

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

gdzie m - masa ciała

- Równanie dynamiki Newtona

$$m\vec{a} = \vec{F}_{wyp}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{wyp}$$

- Jednostka siły - Newton, $N = \frac{kg\ m}{s^2}$
- Przykład: Siła grawitacyjna przy powierzchni Ziemi $\vec{F}_g = m\vec{g}$, $\vec{a} = \vec{g}$.

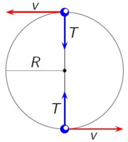
III zasada dynamiki Newtona

Gdy dwa ciała oddziaływają ze sobą, to siły, z jakimi działają na siebie wzajemnie, mają taką samą wartość i przeciwne kierunki

Siła dośrodkowa w ruchu jednostajnym po okręgu

$$F = ma = \frac{mv^2}{R}$$

- siła dośrodkowa jest siłą naprężenia sznurka

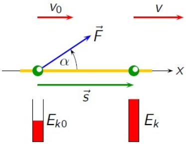


Energia

Kinetyczna energia jest związana ze stanem ruchu ciał

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

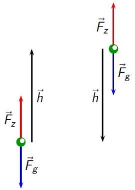
Jednostka energii $[E_k] = \frac{kg\, m^2}{s^2} = J$ (dżul)



Praca

Praca jest energia przekazana lub odebrana ciału poprzez działanie siły

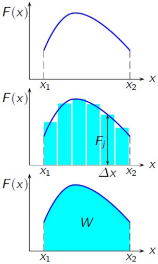
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}, \qquad \vec{F} = const, \qquad W = Fs\cos\alpha$$



Praca zmiennej siły:

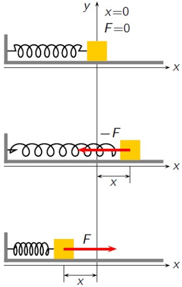
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_j F_j \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

- całka po x



Przykład:

Ciało masy m na sprężynie: siła, która działa na ciało jest proporcjonalna do przemieszczenia ciała ze stanu równowagi, $F(x) = -kx$



Moc

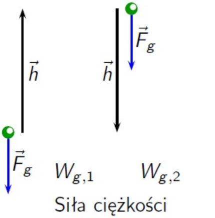
Moc - szybkość, z jaką siła wykonuje pracę

$$P_{sr} = \frac{\Delta W}{\Delta t}, \qquad P = \frac{dW}{dt}$$

Praca i energia potencjalna

Praca siły ciężkości

$$W = -mgh \qquad F_g = -mg$$



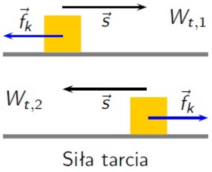
Energia potencjalna zależy od położenia ciała

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W$$

$$F_g = \frac{W}{h} = -\frac{\Delta E_p}{h}$$

Związek siły i energii potencjalnej

$$F = -\frac{dE_p}{ds}$$



Zachowanie energii mechanicznej:

Jeśli w układzie izolowanym działają siły zachowawcze, to energia mechaniczna jest zachowana, $\Delta E_{mech} = 0$. (Tarcie - siła niezachowawcza.)

Ruch ciała

Ruch ciała (nie punktu materialnego) składa się z ruchu jego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy

Środek masy

Dla dwóch cząstek $x_{sm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

Dla n cząstek na osi x

$$x_{sm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

gdzie $m_u = \sum_i m_i$ - masa układu

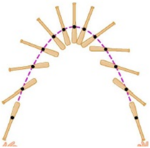
Dla układu n cząstek w przestrzeni

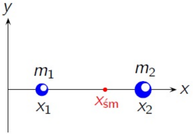
$$\vec{r}_{sm} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

II zasada dynamiki dla układu cząstek:

$$\vec{F}_{wyp} = m_u \vec{a}_{sm}$$

a)





Równania ruchu dla układu cząstek

$$m_u \vec{a}_{sm} = \vec{F}_{wyp}$$

gdzie $\vec{a}_{sm}$ - przyspieszenie środka masy

Pęd cząstki: $\vec{p} = m\vec{v}$

Pęd układu cząstek:

$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_3 + ...\right) = \frac{d}{dt}\, m_u\vec{r}_{sm} = m_u\vec{v}_{sm}$

II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m_u\frac{d\vec{v}_{sm}}{dt} = m_u\vec{a}_{sm} = \vec{F}_{wyp} \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{wyp}$$

Zasada zachowania pędu

Jeśli wypadkowa $\vec{F}_{wyp}$ sił zewnętrznych działających na układ jest równa zeru, to całkowity pęd jest stały, $\vec{P} = const$

Położenie kątowe $\theta = \frac{s}{r}$.

Przemieszczenie, prędkosć i przyspieszenie kątowe

Przemieszczenie kątowe

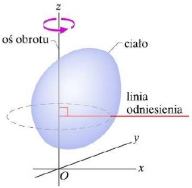
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

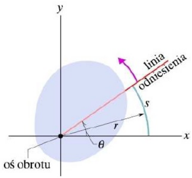
Prędkosć kątowa

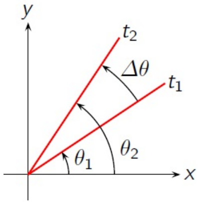
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Przyspieszenie kątowe

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$







Przemieszczenie

$$s = \theta r$$

Prędkość liniowa

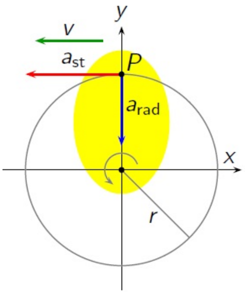
$$v = \omega r$$

Przyspieszenie styczne

$$\vec{a}_{stycz} = \alpha r$$

Przyspieszenie dośrodkowe (radialne)

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + .. = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

gdzie

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

- **moment bezwładności**.

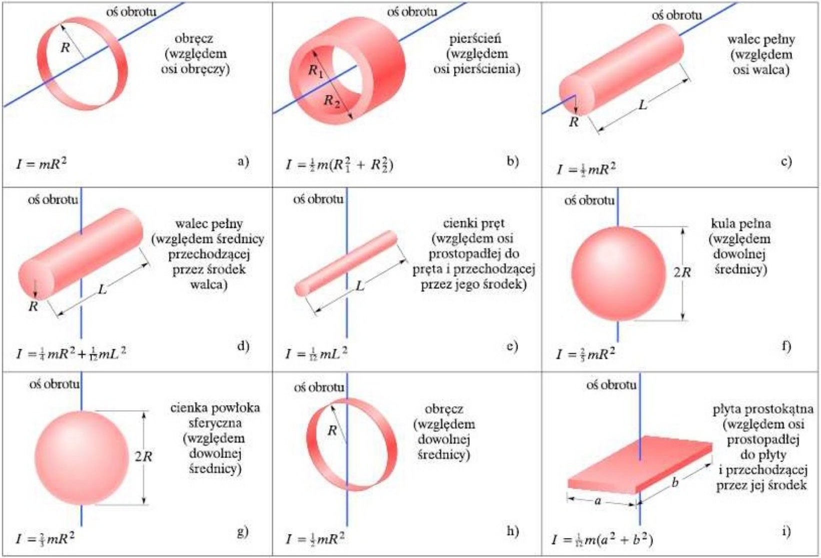
$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Moment siły

$$M = rF_{st} = rF \sin\theta$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

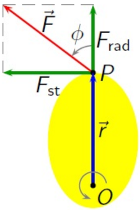
Moment bezwładności ciała

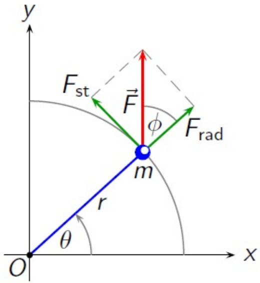


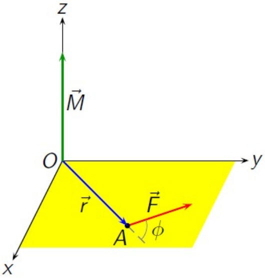
Przyspieszenie styczne w ruchu obrotowym jest wprost proporcjonalne do momentu siły

$$I\alpha = M_{wyp}$$

Dla cząstki $I = mr^2$





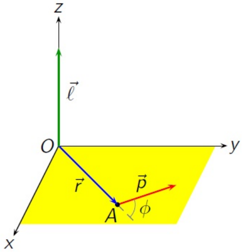


ruch postępowy (stały kierunek)		ruch obrotowy (stała oś)	
położenie	x	położenie kątowe	θ
prędkość	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	prędkość kątowa	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
przyspieszenie	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	przyspieszenie kąt.	$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
masa	m	moment bezwładn.	I
II zasada dynam.	$F_{\mathrm{wyp}} = ma$	II zasada dynam.	$M_{\mathrm{wyp}} = I\alpha$
energia kinet.	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	energia kinet.	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
praca i energia	$W = \Delta E_k$	praca i energia	$W = \Delta E_k$
praca	$W = F\Delta x$	praca	$W = M\Delta\theta$

Moment pędu cząstki

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wartość momentu pędu cząstki $\ell = rp\cos\phi$



Moment pędu układu cząstek

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$$

Moment pędu ciała sztywnego obracającego się wokół osi z prędkością kątową ω

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego, $\vec{M}_{wyp} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$ - dla jednej cząstki

$\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ - dla układu cząstek

Jeśli wypadkowy moment siły $\vec{M}_{wyp}$ jest równy zeru, to moment pędu układu jest stały

$$\vec{L} = const$$

ruch postępowy		ruch obrotowy	
siła	$\vec{F}$	moment siły	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
pęd	$\vec{p}$	moment pędu	$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$
pęd[a]	$\vec{P} = \sum \vec{p}_i$	moment pędu[a]	$\vec{L} = \sum \vec{\ell}_i$
pęd[a]	$\vec{P} = m_u \vec{v}_{\text{śm}}$	moment pędu[b]	$L = I\omega$
II zasada dynam.	$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$	II zasada dynam.	$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$
prawo zachowania[c]	$\vec{P} = \text{const}$	prawo zachowania[c]	$\vec{L} = \text{const}$