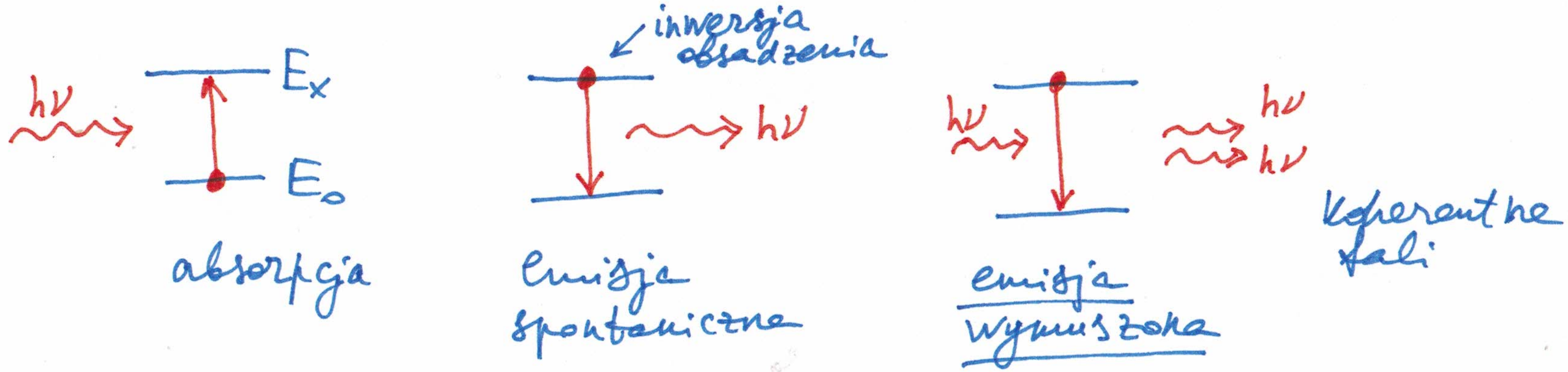
Laser

- światło jest wysoce monochromatyczne
- światło bardzo spójne (koherentne)
- światło dobrze ukierunkowane
- można dokładnie skupić (do 10^7 W/cm^2)



Średni czas życia wzbudzonych atomów wynosi około 10^{-8} s. Dla niektórych atomow może być nawet 10^{-3} s. Stany o długim czasie życia ~~n~~azywamy <u>metatrwałymi</u>

Aparat matematyczny mechaniki kwantowej

Równanie falowe dla funkcji $\Psi(\vec{r}, t)$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi}$$

gdzie $\hat{H}$ jest operatorem (Hamiltonian)

Jeśli funkcja $\Psi(\vec{r}, t)$ jest wybrana tak, że spełniono

$$\boxed{\hat{H} \Psi_n = E_n \Psi_n}$$

to funkcja $\Psi_n(\vec{r}, t)$ jest funkcją własną operatora $\hat{H}$ i jest nazywana funkcją stanu stacjonarnego.

Dla funkcji własnej

$$\Psi_n(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \Psi_n(\vec{r})$$

E_n – wartości własne energii cząstki.

Hamiltonian (operator Hamiltona) cząstki

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) + U(\vec{r})$$

gdzie $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ – operatory składowych pędu

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{H}}_{\text{operator energii}} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\text{operator energii kinetycznej}} + \underbrace{U(\vec{r})}_{\text{operator energii potencjalnej}}$$

$$\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r})}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – operator Laplace'a

$\Rightarrow$ Równanie falowe otrzymuje postać

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(\vec{r})\Psi}$$

(równanie Schrödingera)

Równanie Schrödingera dla stanu stacjonarnego

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r})\right]\Psi = E\Psi, \qquad \Psi = \Psi(\vec{r})$$

Operatory

Rozpatrzmy jakąś wielkość fizyczną f, która charakteryzuje stan cząstki kwantowej.

Wprowadzimy pewien operator matematyczny $\hat{f}$ zdefiniowany w taki sposób, że $(\hat{f}\Psi)$ oznacza wynik działania operatora $\hat{f}$ na funkcję Ψ.

Funkcje własne operatora $\hat{f}$: rozwiązanie równania

$$\hat{f}\Psi = f\Psi$$, gdzie f – wielkość fizyczna

Przykład 1: znaleźć stany cząstki, w których cząstka ma pewną wartość energii E: $\hat{H}\Psi = E\Psi$ – równanie Schrödingera

Przykład 2: znaleźć stany cząstki, w których pęd ma pewną wartość p_x: $\hat{p}_x\Psi = p_x\Psi$

$$-i\hbar\frac{d\Psi}{dx} = p_x\Psi$$

$$\Psi(x) = \mathrm{const}\cdot e^{ip_x x/\hbar}$$

$\hat{f}\Psi_n = f_n\Psi_n$ f_n – wartość własna $\hat{f}$

Ψ_n – funkcja własna $\hat{f}$

Średnia wartość wielkości f w dowolnym stanie stacjonarnym $\psi(\vec{r})$:

$$\underline{\bar{f} = \int \psi^* \hat{f}\, \psi \, dx\,dy\,dz}$$ – całka po objętości:

$\int dx\,dy\,dz \ldots = \int dx \int dy \int dz \ldots$

Warunek unormowania funkcji falowej:

$$\underline{\int |\psi|^2 dx\,dy\,dz = 1}$$ – suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych wartości współrzędnych $= 1$

Jeśli ψ_n – funkcja własna operatora $\hat{f}$: $\hat{f}\psi_n = f_n \psi_n$

$$\bar{f} = \int \psi_n^* \hat{f}\, \psi_n \, dx\,dy\,dz = f_n \int |\psi_n|^2 dx\,dy\,dz = f_n \quad \Rightarrow \quad \underline{\bar{f} = f_n}$$

jeśli ψ_n – wybrana funkcja własna operatora $\hat{f}$

Wprowadzimy <u>operator transportowany</u> $\tilde{\hat{f}}$:

$$\int \Phi(\hat{f}\psi)\,dx\,dy\,dz = \int (\tilde{\hat{f}}\Phi)\,\psi\,dx\,dy\,dz$$, gdzie Φ, ψ – dowolne funkcje

Jeśli $\underline{\tilde{\hat{f}} = \hat{f}^*}$, to operator $\hat{f}$ nazywamy <u>hermitowskim: $\hat{f}^+ = \hat{f}$</u>

Wartości własne operatorów hermitowskich – rzeczywiste $\quad \hat{f}^+ = \tilde{\hat{f}}^*$

Dodawanie i mnożenie operatorów

Jeżeli $\hat{f}$ i $\hat{g}$ – operatory odpowiadające wielkościom fizycznym f i g, to wielkości $f+g$ odpowiada operator $\hat{f}+\hat{g}$:

$$(\hat{f}+\hat{g})\Psi = \hat{f}\Psi + \hat{g}\Psi$$ – dodawanie operatorów

Mnożenie operatorów:

$$\hat{f}\hat{g}\Psi = \hat{f}(\hat{g}\Psi)$$

W ogólnym przypadku $\hat{f}\hat{g} \neq \hat{g}\hat{f}$

Operatory są przemienne (komutują między sobą) jeśli

$$\hat{f}\hat{g} = \hat{g}\hat{f}$$

Twierdzenie: Jeśli operatory $\hat{f}$ i $\hat{g}$ komutują ze sobą, to ich wszystkie funkcje własne można wybrać w taki sposób, aby były one wspólne dla obydwu operatorów.

To znaczy, że jeśli cząstka jest w takim stanie, że $\hat{f}\Psi_n = f_n\Psi_n$, to $\hat{g}\Psi_n = g_n\Psi_n$ – w stanie Ψ_n wielkości f_n i g_n mają pewne wartości.

Macierze

Rozwinięcie dowolnej funkcji falowej na funkcje falowe stanów stacjonarnych ψ_n :

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n$$

⇒ Wartość średnia wielkości fizycznej f :

$$\bar{f} = \sum_{n,m} a_n^* a_m f_{nm}(t) \qquad \bar{f} = \int \psi^* \hat{f} \psi \, dV$$

gdzie

$$\boxed{f_{nm}(t) = \int \psi_n^* \hat{f} \psi_m \, dV} \quad (*) \qquad dV = dx\,dy\,dz$$

Zbiór f_{nm} dla wszystkich możliwych n, m nazywamy macierzą wielkości f, a każdą całkę $(*)$ nazywamy elementem macierzowym przejścia ze stanu m do stanu n.

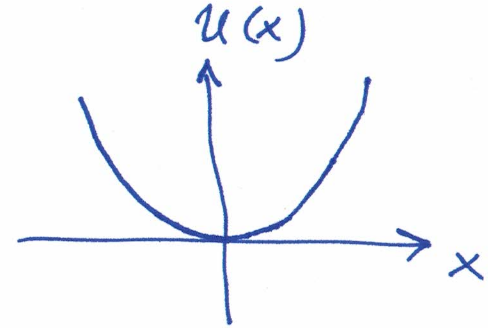
W wypadku fizycznych (rzeczywistych) wielkości f mamy

$$f_{nm} = f_{mn}^* \quad \text{— macierz hermitowska}$$

Reguła mnożenia macierzy: $(\hat{f}\hat{g})_{mn} = \sum_k f_{mk} g_{kn}$

Oscylator liniowy w mechanice kwantowej

Hamiltonian: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$



$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$$U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Równanie Schrödingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi = E\psi$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0$$

Wprowadzimy wielkość bezwymiarową $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$

$$d\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right)\psi = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{d\xi^2}$$

Unormowane rozwiązanie tego równania:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\, H_n\!\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$$

$H_n(\xi)$ – wielomiany Hermite'a

$n = 0, 1, 2 \ldots$

Funkcja falowa stanu podstawowego

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

Poziomy energetyczne oscylatora:

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Poziomy energetyczne oscylatora są równo oddalone od siebie o $\hbar\omega$.

Energia stanu podstawowego:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$