Dynamika

Jeśli na poruszające się ciało nie działają siły to jego ruch trwa bez końca (Galileusz)

Teoria Newtona

Mechanika klasyczna opisuje świat ciał makroskopowych poruszających się znacznie wolniej od prędkości światła.

Mechanika kwantowa opisuje świat mikroskopowy

Teoria względności Einsteina opisuje ruch z wielkimi prędkościami ($\sim c$)

Przyczyna przyspieszenia ciała — siła $\vec{F}$

Jeśli na ciało działa kilka sił to ich suma wektorowa nosi nazwę siły wypadkowej $\vec{F}_{wyp}$

I zasada dynamiki Newtona

Jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zeru ($\vec{F}_{wyp}=0$), to nie zmienia się jego prędkość.

Inercjalny układ odniesienia — układ, w którym spełnione są zasady dynamiki Newtona.

II zasada dynamiki Newtona

Jeśli na ciało działa siła wypadkowa, to ciało porusza się z przyspieszeniem $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

m - masa ciała

Równanie dynamiki Newtona

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_{wyp}}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{wyp}$$

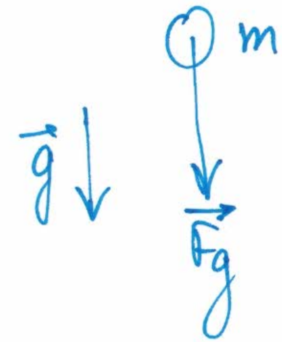
- równanie różniczkowe dla $\vec{r}(t)$!

Jednostka siły: $N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$ (Newton)

Przykład: Siła grawitacji przy powierzchni Ziemi $\vec{F}_g = m\vec{g}$

$\vec{g} = Const$

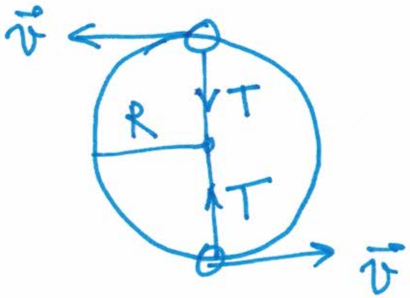
$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$



III zasada dynamiki Newtona

Gdy dwa ciała oddziaływują ze sobą, to siły, z jakimi działają na siebie wzajemnie mają taką samą wartość i przeciwne kierunki.

Siła dośrodkowa w ruchu jednostajnym po okręgu



Kulka na sznurku
(ruch w poziomie)

$$F = ma = \frac{mv^2}{R}$$

– (siła dośrodkowa jest siłą naprężenia sznurka)

Energia

Kinetyczna energia $\boxed{E_k = \frac{mv^2}{2}}$ – związana ze stanem ruchu ciał

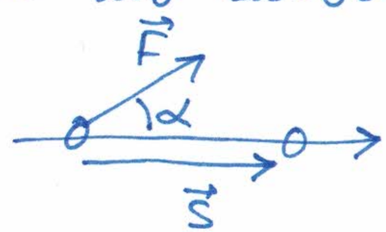
Jednostka energii $[E_k] = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = J$ (dżul)

Praca

Praca jest energią przekazaną lub odebraną ciału poprzez działanie siły.

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

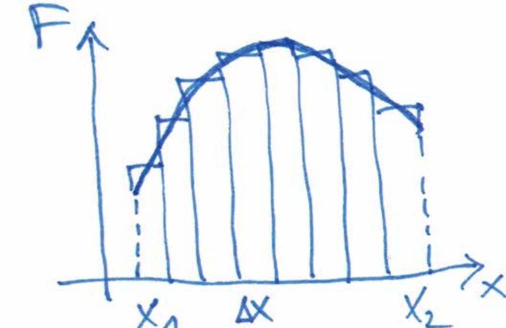
F = Const



$$W = Fs\cos\alpha$$

Praca zmiennej siły

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_j F_j \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$ (całka po x)

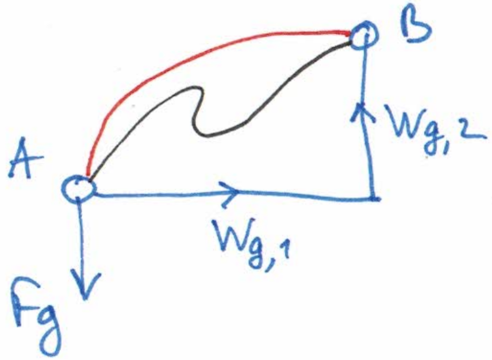


Moc

– szybkość z jaką siła wykonuje pracę

$$P_{śr} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$ – moc chwilowa

Praca i energia potencjalna



Praca siły ciężkości $\boxed{W = -mgh}$

$F_g = -mg$

Energia potencjalna zależy od położenia ciała

$$\boxed{\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W}$$

$$F_g = \frac{W}{h}$$

$$F_g = -\frac{\Delta E_p}{h}$$

Związek siły i energii potencjalnej

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{ds}}$$

Zachowanie energii mechanicznej

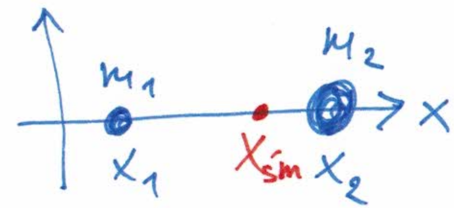
Jeśli w układzie izolowanym działają siły zachowawcze, to energia mechaniczna jest zachowana $\Delta E_{mech} = 0$

(Tarcie – siła niezachowawcza)

Ruch ciała (nie punktu materialnego) składa się z ruchu jego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy

Środek masy

Dla dwóch cząstek: $X_{\text{śm}} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$



Dla n cząstek na osi x:

$$x_{\text{śm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Dla układu n cząstek w przestrzeni:

$$\boxed{\vec{r}_{\text{śm}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$$

$m_u = \sum_i m_i$ – masa układu

II zasada dynamiki dla układu cząstek: $\vec{F}_{wyp} = m_u \vec{a}_{\text{śm}}$

$\vec{a}_{\text{śm}}$ – przyspieszenie środka masy układu

Pęd cząstki: $\boxed{\vec{p} = m \vec{v}}$

Pęd układu: $\boxed{\vec{P} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = m_u \vec{v}_{\text{śm}}}$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots\right) = \frac{d}{dt} m_u \vec{r}_{\text{śm}}$$

II zasada dynamiki:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{wyp}}$$

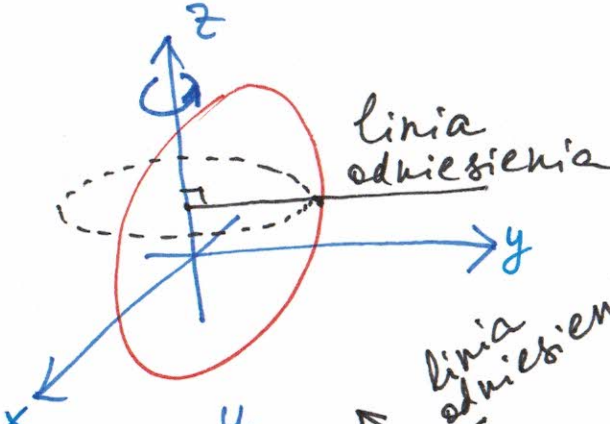
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m_u \frac{d\vec{v}_{śm}}{dt} = m_u \vec{a}_{śm} = \vec{F}_{wyp}$$

Zasada zachowania pędu

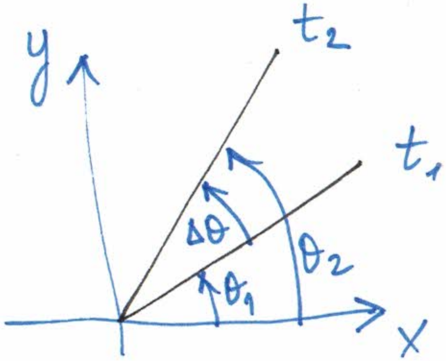
Jeśli wypadkowa $\vec{F}_{wyp}$ sił zewnętrznych działających na układ jest równa zeru, to całkowity pęd jest stały: $\boxed{\vec{P} = \text{const}}$

Obrót ciała

Położenie kątowe $\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$



Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie kątowe



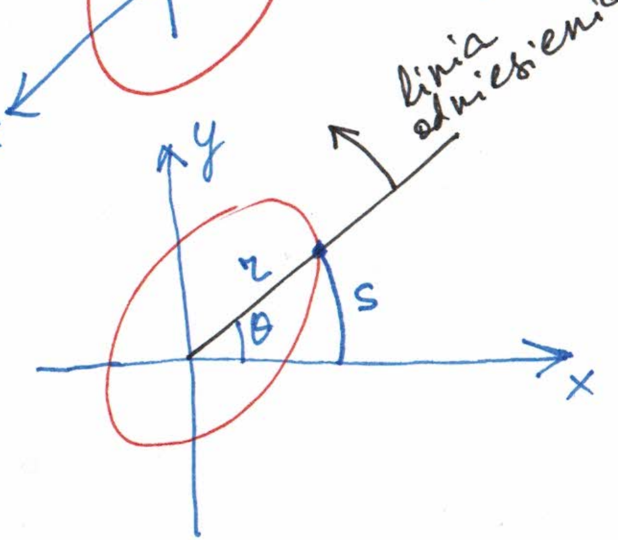
Przemieszczenie kątowe $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Prędkość kątowa

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Przyspieszenie kątowe

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$



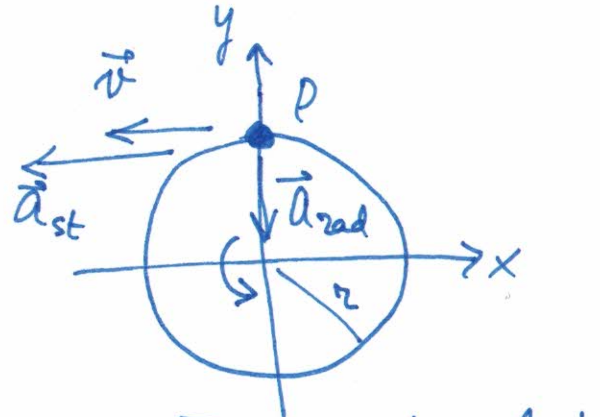
Związek zmiennych kątowych z liniowymi

Przemieszczenie $\boxed{s = \theta r}$

Prędkość $\boxed{v = \omega r}$

Przyspieszenie styczne $\boxed{a_{st} = \alpha r}$

Przyspieszenie dośrodkowe (radialne) $\boxed{a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$



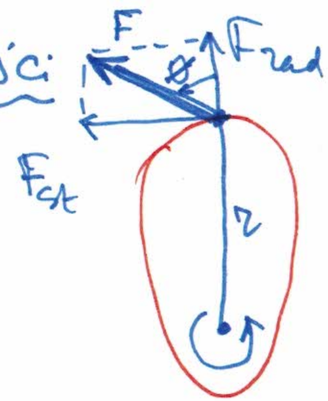
Ciało w ruchu obrotowym wokół osi z

Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{I\omega^2}{2}}$$

$I = \sum_i m_i r_i^2$ – moment bezwładności



Moment siły

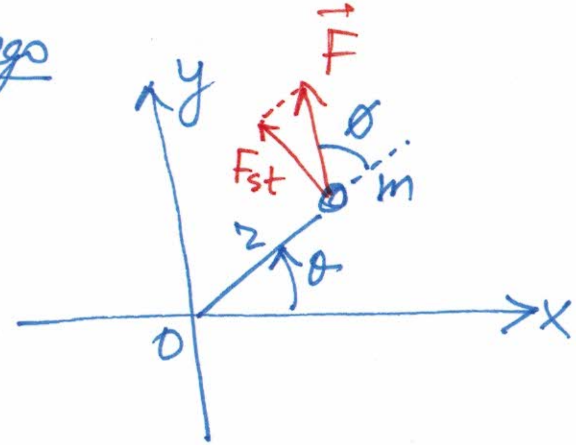
$$M = r F_{st} = r F \sin\theta$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

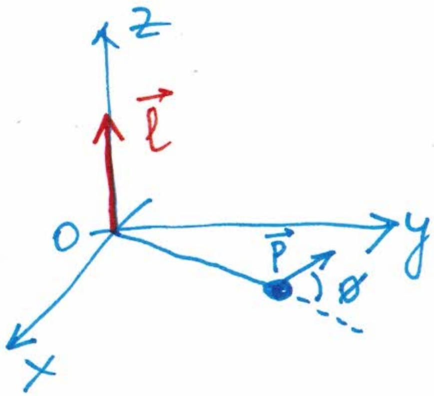
II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\boxed{M_{wyp} = I\alpha}$$

$I = mr^2$ dla cząstki



Moment pędu cząstki



$$\boxed{\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

Wartość: $l = rp\sin\theta$

– wielkość analogiczna do pędu dla ruchu postępowego

Moment pędu układu cząstek

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i$$

Moment pędu ciała sztywnego obracającego się wokół osi z prędkością kątową ω:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Zasada zachowania momentu pędu

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$ – dla jednej cząstki

$$\boxed{\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$ – dla układu cząstek

$$\vec{M}_{wyp} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

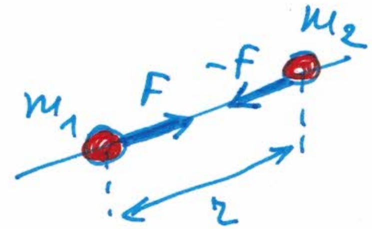
Jeśli wypadkowy moment siły $\vec{M}_{wyp}$ jest równy zeru, to moment pędu układu jest stały:

$$\boxed{\vec{L} = \text{const}} \quad (\vec{M}_{wyp} = 0)$$

Grawitacja

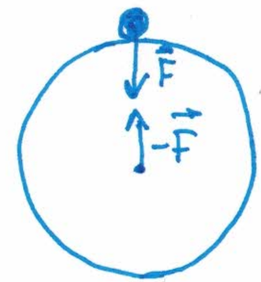
Prawo powszechnego ciążenia (Newton, 1665)

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$



$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Ciało w kształcie jednorodnej powłoki kulistej przyciąga cząstkę znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jak gdyby masa powłoki była skupiona w jej środku.



Gdy mamy do czynienia z grupą cząstek, możemy wyznaczyć wypadkową siłę grawitacyjną, jaką działają na jedną z cząstek wszystkie inne, korzystając z zasady superpozycji:

$$\vec{F}_{1,wyp} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}$$

Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

M – masa Ziemi
R – promień

Faktycznie przyspieszenie w pobliżu powierzchni Ziemi różni się od g z powodu tego, że:

1) Ziemia nie jest jednorodna
2) Ziemia nie jest kulista
3) Ziemia obraca się

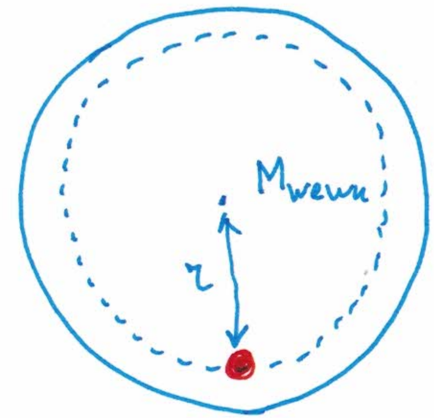
$$ma = mg - m\omega^2 R$$
$$a = g - \omega^2 R$$

Grawitacja wewnątrz Ziemi

$$F = \frac{G m M_{wewn}}{r^2}$$

$$M_{wewn} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$

ρ – średnia gęstość

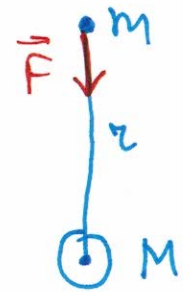


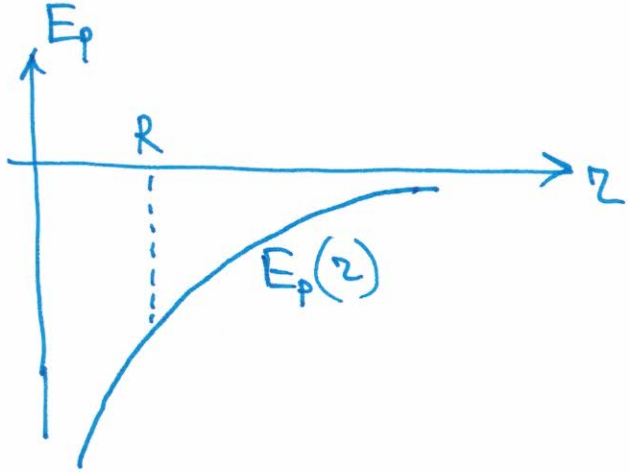
Wypadkowa siła grawitacyjna, jaką ciało w kształcie jednorodnej powłoki kulistej działa na cząstkę znajdującą się wewnątrz powłoki, jest równa zeru.

Grawitacyjna energia potencjalna

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r}}$$

$$F = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{GMm}{r^2}$$





Prędkość ucieczki – minimalna prędkość, którą należy nadać obiektowi, aby oddalił się z powierzchni danego ciała niebieskiego do nieskończoności.

Prawo zachowania energii mechanicznej:

$$E_{mech} = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v_u^2 - \frac{G m M}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Ciało	M [kg]	R [m]	v_u [$\frac{km}{s}$]
Księżyc	$7{,}36 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	2,4
Ziemia	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	11,2
Jowisz	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$7{,}15 \cdot 10^{7}$	59,5
Słońce	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$6{,}96 \cdot 10^{8}$	618,0

Ruchy ciał niebieskich : prawa Keplera

Prawo powszechnego ciążenia razem z prawami dynamiki Newtona opisują bardzo dobrze ruch obiektów w Kosmosie

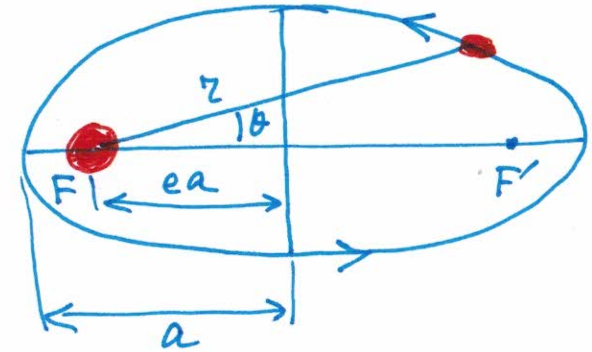
Prawa Keplera – opisują ruch planet wokół Słońca

1) Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisku znajduje się Słońce

2) Linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity $\left(\frac{dS}{dt} = const\right)$

3) Kwadrat okresu ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej tej orbity,

$$\underbrace{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3}_{\text{dla orbity kołowej}}$$



a – półoś wielka elipsy

e jest mimośrodem elipsy

(dla Ziemi $e = 0{,}0167$)