Mechanika Lagrange'a

Rzeszów University of Technology

12 stycznia 2023

Literatura

- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Mechanika, rozdz. 1 i 2.
- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Teoria pola, rozdz. 1 i 2.

Tor ruchu cząstki w mechanice klasycznej – funkcja $r(t)$

Zasada najmniejszego działania

Niech w chwilach $t = t_1$ i $t = t_2$ cząstka ma określone położenia r_1 i r_2. Wtedy między tymi położeniami cząstka porusza się tak, że całka

$$S[r(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(r, \dot{r}, t)\, dt \qquad \left(\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = v\right)$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość.

$S[r(t)]$ - **działanie**, $L(r, \dot{r}, t)$ - **funkcja Lagrange'a**

Niech $r(t)$ jest ta funkcja, dla której $S[r(t)]$ ma minimum. Jeśli weźmiemy $r(t) + \delta r(t)$ zamiast $r(t)$, to odpowiednia zmiana powinna być równa zeru, $\delta S = 0$ (warunek minimum funkcji $S[r(t)]$)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(r + \delta r, \dot{r} + \delta\dot{r}, t) - L(r, \dot{r}, t)\right] dt = 0$$

- pod warunkiem, że $\delta r(t_1) = \delta r(t_2) = 0$

Rozwinięcie w szereg

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial r}\, \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\, \delta \dot{r} \right) dt = 0$$

Całkujemy drugi człon przez części

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial r}\, \delta r + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\, \delta r \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) \delta r \right] dt$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\, \delta r \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) \delta r\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) \delta r\, dt = 0$$

Dostajemy **równanie Lagrange'a** (równanie ruchu cząstki)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

Dla cząstki nierelatywistycznej w potencjale $U(r)$ funkcja Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - U(r)$$

Po podstawieniu w równanie Lagrange'a dostajemy równanie ruchu klasycznej mechaniki

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r}$$

gdzie $-\frac{\partial U}{\partial r} = F$ (F – siła)

Matematyka – całkowanie

$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \qquad (A = const)$

$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Jeśli $\int f(x)dx = F(x) + C$ i $u = \phi(x)$, to $\int f(u)du = F(u) + C$

Przykład:

$\int f(ax+b)dx = \int f(ax+b)\frac{d(ax+b)}{a} = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

$\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$

$\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \quad u = u(x), \quad v = v(x)$$

Przykład

$$\int x \ln x\,dx = \int \ln x\,d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,\frac{dx}{x} \qquad u = \ln x, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Całka oznaczona - obliczenie przez calkę nieoznaczoną

$\int f(x)\,dx = F(x)$ – całka nieoznaczona (bez $C = const$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

W obliczeniach:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

- **Jednorodność czasu**, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\,\dot{\vec{r}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\,\ddot{\vec{r}} \qquad\qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)$$

$$= \dot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\,\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\,\dot{\vec{r}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \vec{v}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = const$$

gdzie E - energia cząstki.

Jeśli $L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r})$, to $E = \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r})$

- **Jednorodność przestrzeni** - L nie zmienia się przy malej translacji przestrzeni, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r} + \vec{\varepsilon}$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\,\delta\vec{r} = \vec{\varepsilon}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const,$ gdzie $\vec{p}$ - pęd cząstki

- **Izotropowość przestrzeni** - L nie zmienia się przy małym obrocie, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = const,$$

gdzie $\vec{M}$ - moment pędu cząstki.

Działanie cząstki swobodnej

$$S = -mc \int_a^b ds$$

gdzie ds - **interwał**, $ds^2 = c^2 dt^2 - x^2 - y^2 - z^2$, $a = (t_1, \vec{r}_1)$, $b = (t_2, \vec{r}_2)$ - zdarzenia albo **punkty świata**, całkowanie wzdłuż **linii świata**

W układzie związanym z cząstka, która porusza się z prędkością $\vec{v}$

$$ds = c\, dt_0 = c\, dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

gdzie dt_0 - czas własny

Po podstawieniu do działania

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

Ponieważ $S = \int L\, dt$, dostajemy Lagrangian cząstki swobodnej w mechanice relatywistycznej

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Pęd i energia cząstki $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m \vec{v}$, $E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \gamma mc^2$

Przy $v \ll c$ dostajemy $\vec{p} \simeq m\vec{v}$, $E \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2}$, gdzie $E_0 = mc^2$ - **energia spoczynku**

Matematyka: Przy $v \ll c$ wykorzystaliśmy rozwinięcie w szereg:

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \simeq 1 - v^2/2c^2$$