

8. Elektryczność i magnetyzm

Rzeszów University of Technology

29 stycznia 2025

- D. Halliday, R. Resnik, J. Walker. Podstawy fizyki, tom 3.
- Fizyka dla szkół wyższych, tom 2. Openstax Polska.
- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Teoria pola.
- H.D. Young, R.A. Freedman. University Physics.
- E.M. Purcell, Elektryczność i magnetyzm (Kurs fizyki Berkeley, tom 2)

- Ładunek elektryczny - jedna z podstawowych własności cząstek elementarnych (elektrony, protony, ...)
- Istnieją ładunki dodatni i ujemne.
- Ładunek jest skwantowany: ładunek elementarny $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Kulomb)
- Elektron: $-e$, proton: $+e$, neutron: 0 , kwarki: $\pm \frac{1}{3} e$, $\pm \frac{2}{3} e$
- Atomy są obojętne: liczba elektronów na orbitach jest taka sama jak liczba protonów w jądrze
- Prawo zachowania ładunku: **W układach izolowanych ładunek elektryczny jest zachowany**
- Anihilacja elektronu i pozytonu: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$
Kreacja pary: $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ (proces odwrotny)
- Ciało jest naładowane jeśli ma niezrównoważony ładunek (ładunek wypadkowy)

Oddziaływanie ładunków elektrycznych

Ładunki elektryczne o takich samych znakach odpychają się, a ładunki elektryczne o przeciwnych znakach się przyciągają

Przykład: W tonerach kserokopiarki kulka nośnika jest pokryta cząstkami tonera w wyniku przyciągania elektrostatycznego

Przewodniki i izolatory

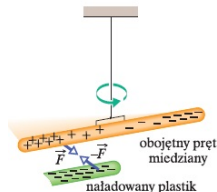
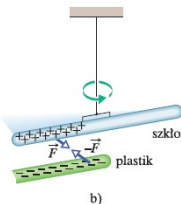
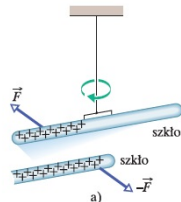
Przewodniki - ładunki swobodnie poruszają się (metale, woda z solami, ciało ludzkie)

Istnienie elektronów swobodnych w metalach prowadzi do indukcji (rozdzielenia ładunków)

Izolatory - ładunki nie poruszają się (plastik, szkło, guma, woda destylowana)

Półprzewodniki - materiały pośrednie między przewodnikami i izolatorami (krzem, german, arsenek galu, ...)

Nadprzewodniki - brak oporu przy przepływie w nich ładunku elektrycznego



Szkłany pręt pocieramy jedwabiem

Plastikowy pręt pocieramy futrem

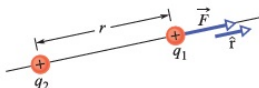
Siła elektrostatyczna między ładunkami punktowymi q_1 i q_2

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

gdzie $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^{19} \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ - stała elektrostatyczna, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$.

Porównanie z grawitacją:

- Taka sama zależność od r
- Siła grawitacyjna - zawsze przyciągająca
- Siła grawitacyjna jest bardzo słaba, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$



Siły elektryczne działające na dany ładunek dodają się wektorowo - **zasada superpozycji**

Cząstka na zewnątrz powłoki: Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w środku

Cząstka wewnątrz powłoki: Wypadkowa siła działająca na naładowaną cząstkę, znajdującą się wewnątrz naładowanej jednorodnie powłoki, jest równa zero

Ładunek cząstki jest bardzo mały, aby nie zaburzyć rozkładu ładunku na powłoce!

Działanie ładunków na odległości

- Wokół danego ładunku powstaje pole elektryczne \vec{E}
- Przy zmianie położenia ładunku, pole elektryczne zmienia się z prędkością światła

Pole elektryczne jest polem wektorowym: każdy punkt przestrzeni ma przepisany wektor natężenia pola \vec{E}

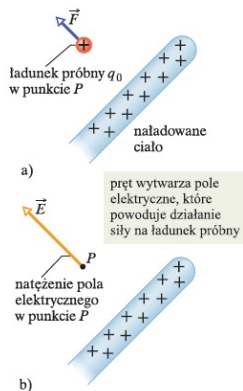
Natężenie pola elektrycznego:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

(Istnieją pola skalarne - na przykład pole temperatury)

Siła, działająca na ładunek q_0 w polu elektrycznym \vec{E}

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$



Linie pola elektrycznego

Pole elektryczne można obrazowo przedstawić używając linii sił (M. Faraday)

- Wektor \vec{E} jest styczny do linii sił
- Większa gęstość linii odpowiada większej wartości pola \vec{E}
- Linii sił wychodzą z ładunków dodatnich, wchodzą do ujemnych

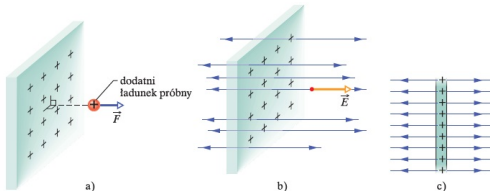
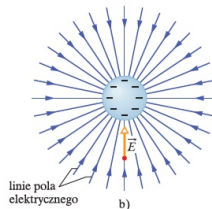
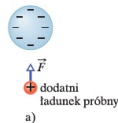
Pole elektryczne ładunku punkowego q

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Jednorodnie naładowana płyta

Pole elektryczne jednorodne

Zasada superpozycji stosuje się zarówno do natężenia pola elektrycznego, jak i sił elektrostatycznych



Dipol elektryczny

Natężenie pola w punkcie P na osi dipola

$$E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+^2} - \frac{q}{r_-^2} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(z-d/2)^2} - \frac{q}{(z+d/2)^2} \right),$$

gdzie $r_+ = z - d/2$, $r_- = z + d/2$.

Przy $z \gg d/2$ można znaleźć przez rozwinięcie w szereg po $(d/2z) \ll 1$

$$E \simeq \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3} \Rightarrow E \simeq \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

gdzie $p = qd$. W ogólnym przypadku

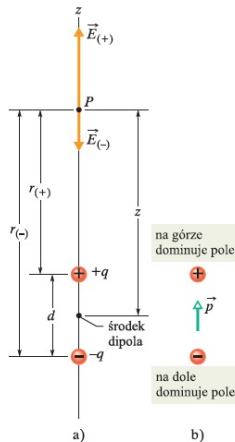
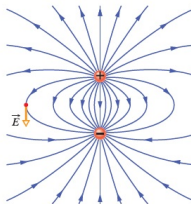
$$\vec{p} = \sum_a q_a \vec{r}_a$$

Wektor \vec{p} jest **momentem dipolowym elektrycznym**

Pole elektryczne dipola w dowolnym punkcie przestrzeni \vec{R}

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{p}) \vec{n} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

gdzie \vec{n} - wektor jednostkowy w kierunku wektora \vec{R}



Przy $|x| \ll 1$

$$(1+x)^n \simeq 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Przy $|\theta| \ll 1$ (θ w radianach)

$$\sin \theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

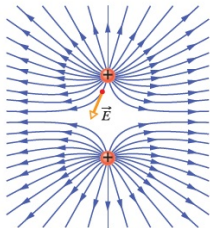
$$\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\operatorname{tg} \theta \simeq \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$$

Przykład

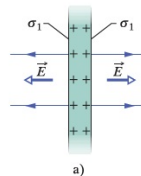
$$\frac{1}{(z-d/2)^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} \simeq \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{2d}{2z}\right) + \dots$$

Linie pola dwóch jednakowych ładunków

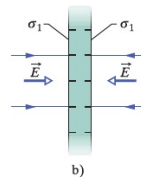


Odpychanie linii pola

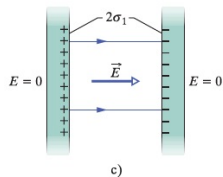
Płyty naładowane przeciwnymi ładunkami – pole jednorodne



a)



b)



c)

Naładowany pierścień

$$dq = \lambda ds \quad \lambda - \text{linowa gęstość ładunku}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)}$$

$$dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$
$$\left(\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds$$

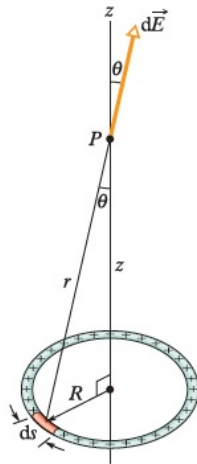
$$= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\left(\int_0^{2\pi R} ds = 2\pi R \right)$$

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Przy $z \gg R$:

$$E \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$



Siła, która działa na ładunek w polu elektrycznym

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

– Siła elektryczna \vec{F} działająca na naładowaną cząstkę, umieszczoną w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} ma kierunek \vec{E} jeśli $q > 0$ i ma przeciwny kierunek jeśli $q < 0$.

Pomiar ładunku elementarnego – doświadczenie Millikana (1910-1913)

Millikan przeanalizował ruch kropelek oleju w komorze w polu elektrycznym. Ruch kropelek można było śledzić przez lunetkę.

Robert Millikan odkrył, że wartości ładunku q były zawsze dane przez $q = ne$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C – stała podstawowa

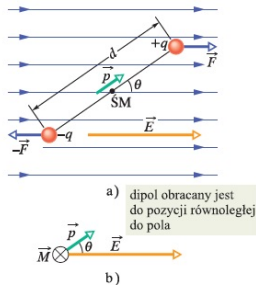
Dipol w polu elektrycznym

W jednorodnym polu elektrycznym na dipol dział moment siły $M = Fx \sin \theta + F(d - x) \sin \theta = Fd \sin \theta = pE \sin \theta$

gdzie $p = qd$ - moment dipolowy

W postaci wektorowej

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$



Energia potencjalna dipola elektrycznego w polu elektrycznym

Dipol ma najmniejszą energią potencjalną, gdy jest zorientowany tak, że jego moment dipolowy \vec{p} jest skierowany w kierunku pola - wówczas $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$

Wybieramy zero energii potencjalnej przy $\theta = 90^\circ$. $E_p = -W = \int_{\pi/2}^{\theta} M d\theta = \int_{\pi/2}^{\theta} pE \sin \theta d\theta =$
 $pE \int_{\pi/2}^{\theta} \sin \theta d\theta = -pE \cos \theta \Big|_{\pi/2}^{\theta} = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Przy $\theta = 0$: $E_p = -pE$, przy $\theta = \pi$: $E_p = +pE$

Prawo Gaussa określa związek między natężeniem pola elektrycznego w punktach na zamkniętej powierzchni Gaussa i całkowitym ładunkiem objętym tą powierzchnią

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$$

Strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię Gaussa

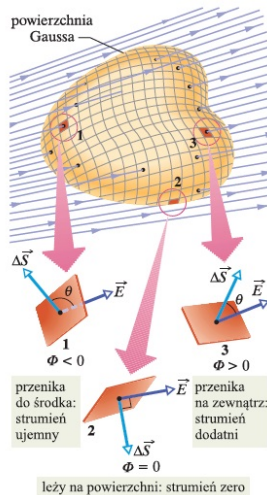
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Strumień elektryczny Φ przenikający przez powierzchnię Gaussa jest proporcjonalny do całkowitej liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez tę powierzchnię

Prawo Gaussa: $\varepsilon_0 \Phi = q_{wewn}$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{wewn}$$

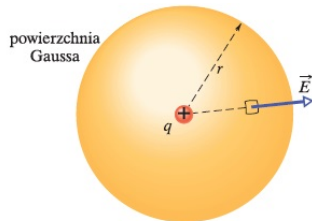
gdzie q_{wewn} – ładunek zawarty wewnątrz zamkniętej powierzchni



Prawo Gaussa

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E \oint dS = \varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



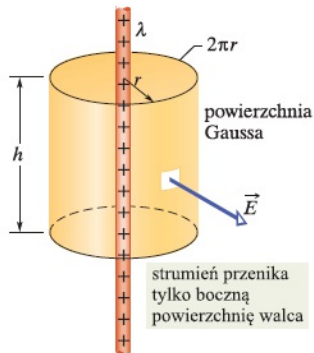
Pole elektryczne naładowanego przewodnika (pręta)

Prawo Gaussa

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E \cdot 2\pi r h = \lambda h$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

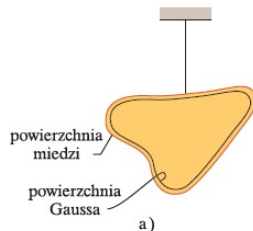
gdzie λ - liniowa gęstość ładunku



Izolowany przewodnik naładowany

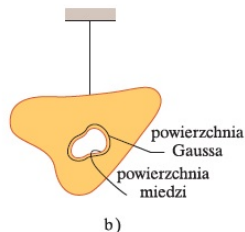
Jeśli nadwymiarowy ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku, to ten ładunek przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika.

We wnętrzu przewodnika nie ma żadnego nadwymiarowego ładunku



Izolowany przewodnik z wnęką

Na ścianach wnęki nie ma wypadkowego ładunku – cały nadwymiarowy ładunek pozostaje na zewnętrznej powierzchni przewodnika



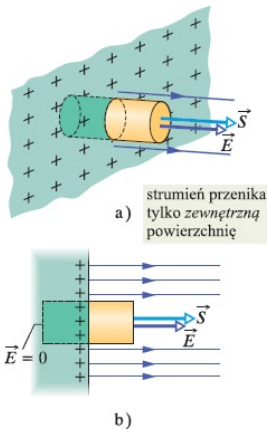
Prawo Gaussa

$$\varepsilon_0 ES = \sigma S$$

⇒ Pole nad powierzchnią przewodnika

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

gdzie σ - gęstość ładunku (ładunek na jednostkę pola powierzchni)

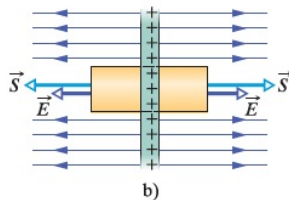
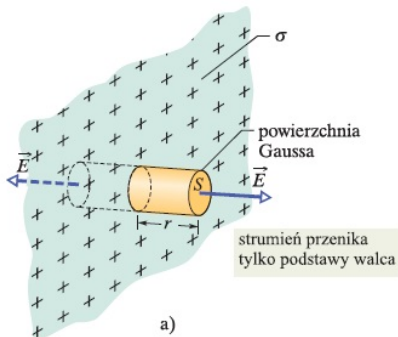


Prawo Gaussa

$$\epsilon_0(ES + ES) = \sigma S$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

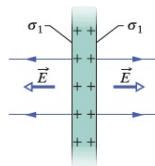
gdzie σ - ładunek na jednostkę powierzchni płyty (gęstość ładunku)



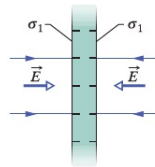
Pole elektryczne

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

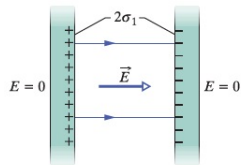
gdzie σ - gęstość powierzchniowa ładunku na każdej wewnętrznej powierzchni



a)



b)



c)

Elektryczna energia potencjalna $\Delta E_p = E_{p,konc} - E_{p,pocz} = -W$

Wykonana praca przez siły elektrostatyczne nie zależy od toru cząstek

Energia potencjalna na jednostkowy ładunek E_p/q nie zależy od q i jest cechą charakterystyczną pola elektrycznego

Potencjał

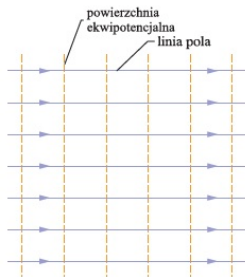
$$V = \frac{E_p}{q}$$

Różnica potencjałów

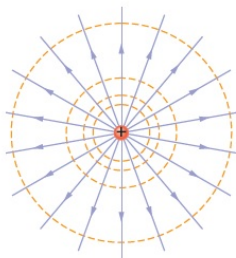
$$\Delta V = V_{konc} - V_{pocz} = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{W}{q}$$

Potencjał V jest skalarem

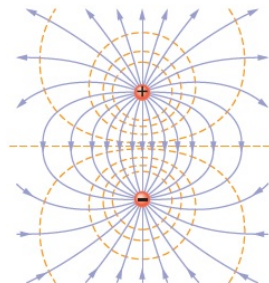
Powierzchnie ekwipotencjalne



a)



b)



c)

Związek potencjału i natężenia pola

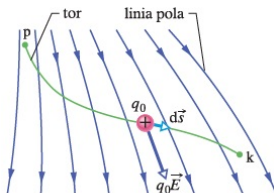
Wykonana praca

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$W = q \int_{pocz}^{konc} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow V_{konc} - V_{pocz} = - \int_{pocz}^{konc} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

– całka krzywoliniowa (całka wzdłuż toru)



Potencjał pola ładunku punkowego

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E dr$$

$$V_{konc} - V_{pocz} = - \int_R^\infty E dr, \quad (V_{konc} = 0)$$

Pole ładunku q

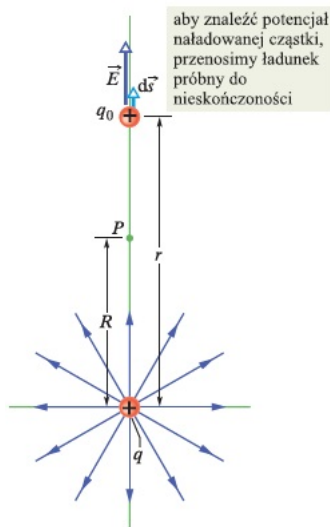
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$0 - V = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_R^\infty = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Natężenie pola

$$E = - \frac{dV}{dr}$$



$$dV = -E \cos \theta ds$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

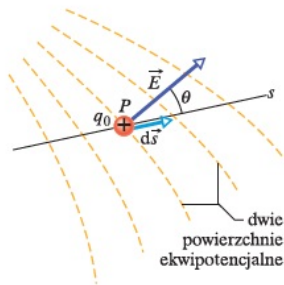
$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

gdzie $\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Potencjał pola układu ładunków punktowych

Zasada superpozycji dla n ładunków punktowych

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$



Potencjał pola dipola elektrycznego

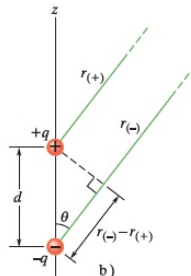
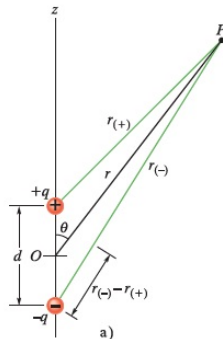
Potencjał w punkcie P przy $r \gg d$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + d \cos \theta} \right)$$

$$\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

gdzie $p = qd$ - wartość elektrycznego momentu dipolowego



Potencjał pola układu ładunków punktowych

Dla układu n ładunków punktowych wypadkowy potencjał wynosi

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

– suma algebraiczna (nie wektorowa). **Dlatego obliczenie potencjału jest łatwiejsze niż obliczenie pola elektrycznego \vec{E} .**

Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

Potencjał, wytworzony przez element ładunku dq w punkcie P

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$
$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

– dla ładunku rozłożonego w przestrzeni

Potencjał w punkcie P związany z elementem dx

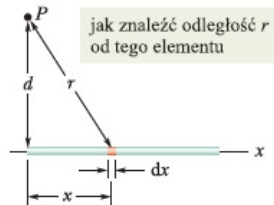
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}, \quad (dq = \lambda dx)$$

gdzie λ - gęstość liniowa ładunku

$$V = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln[x + \sqrt{x^2 + d^2}] \Big|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln(L + \sqrt{L^2 + d^2}) - \ln d] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}$$



Indukowany moment dipolowy

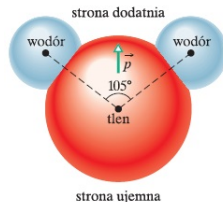
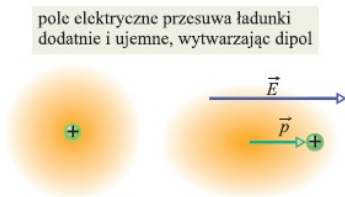
Pole odkształca orbitę elektronu i rozsuwa środki ładunku dodatniego i ujemnego

Powstaje moment dipolowy \vec{p} , skierowany w kierunku natężenia pola \vec{E}

Taki moment dipolowy nazywamy **indukowanym** przez pole, a o atomie mówimy, że jest **spolaryzowany** przez pole

Podobne zjawisko - dla cząsteczek niepolarnych (w których nie ma trwałego elektrycznego momentu)

Cząsteczka wody ma trwały elektryczny moment dipolowy



Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych

Elektryczna energia potencjalna układu ładunków jest równa pracy, jaką musi wykonać siła zewnętrzna, aby utworzyć ten układ, przenosząc każdy ładunek z nieskończonej odległości

1) przemieszczenie ładunku q_1 nie potrzebuje wykonania żadnej pracy (nie ma siły, która by działała na ładunek)

2) przemieszczenie ładunku q_2 w punkt na odległości r od q_1 potrzebuje pracy

$$W = q_2 V$$

gdzie $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$ - potencjał od q_1 w punkcie r

$$\Rightarrow E_p = W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

Pojemność elektryczna

Równanie kondensatora

$$q = CU$$

gdzie $U = \Delta V$ - napięcie, C - pojemność kondensatora

Jednostka pojemności w układzie SI – farad

1 farad = 1 F = 1 C/V (kulomb/wolt)

Natężenie pola elektrycznego w kondensatorze

Prawo Gaussa: $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \epsilon_0 ES = q$

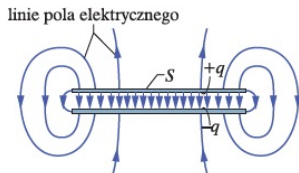
$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

Pojemność płaskiego kondensatora

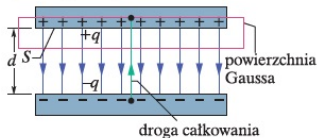
Napięcie na kondensatorze

$$U = \int_A^B E ds = Ed, \quad C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 ES}{Ed}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



korzystamy z prawa Gaussa, aby powiązać q i E , a następnie całkujemy E , aby znaleźć różnicę potencjałów



Kondensatory połączone równolegle

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad q_3 = C_3 U$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) U$$

Dla n kondensatorów

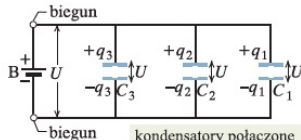
$$C_{rw} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Kondensatory połączone szeregowo

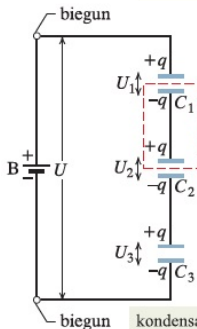
$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}, \quad U_3 = \frac{q}{C_3}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

$$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$



kondensatory połączone równolegle i kondensator równoważny mają jednakowe różnice potencjałów



kondensatory połączone szeregowo i kondensator równoważny mają jednakowe ładunki

Praca przeniesienia ładunku dq' z jednej płytki kondensatora na drugą $dW = U' dq' = \frac{q'}{C} dq'$,
gdzie U' - napięcie w chwili, kiedy przeniesiony ładunek stanowił q'

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}$$

gdzie q - całkowity ładunek przeniesiony z jednej płytki na drugą

$$E_p = \frac{q^2}{2C}, \quad E_p = \frac{1}{2} CU^2$$

Gęstość energii pola elektrycznego

$$u = \frac{E_p}{Sd} = \frac{CU^2}{2Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

gdzie było wykorzystano $C = \epsilon_0 S/d$ i $E = U/d$.

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Pojemność kondensatora z dielektrykiem

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_{\text{prozni}}$$

gdzie ε_r - przenikalność elektryczna względna materiału izolującego (dielektryka)

W obszarze wypełnionym całkowicie materiałem dielektrycznym o względnej przenikalności ε_r wszystkie równania elektrostatyki, zawierające przenikalność elektryczną próżni ε_0 należy zmodyfikować, zastępując ε_0 przez $\varepsilon_r \varepsilon_0$

Pole elektryczne ładunku punktowego wewnątrz dielektryka

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Tabela 25.1. Niektóre właściwości dielektryków ^a

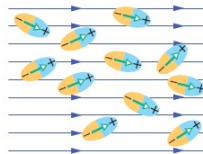
Material	Przenikalność elektryczna względna ϵ_r	Wytrzymałość na przebicie [kV/mm]
Powietrze (1 atm)	1,00054	3
Polistyren	2,6	24
Papier	3,5	16
Olej trans-formatorowy	4,5	
Pyreks	4,7	14
Mika	5,4	
Porcelana	6,5	
Krzem	12	
German	16	
Etanol	25	
Woda (20° C)	80,4	
Woda (25° C)	78,5	
Ceramika tytanowa	130	
Tytanian strontu	310	8
Dla próżni $\epsilon_r = 1$		

Dielektryki polarne: cząsteczki mają trwałe momenty dipolowe (np. woda)

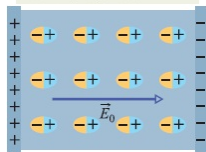
Uporządkowane dipole elektryczne wytwarzają pole elektryczne skierowane przeciwnie do przyłożonego pola i mniejszej wartości

Dielektryki niepolarne: po umieszczeniu w zewnętrznym polu elektrycznym cząsteczki uzyskują indukowane momenty dipolowe

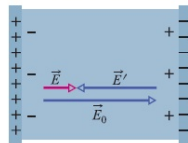
Bez pola moment dipolowy $\vec{p} = 0$



przyłożone pole elektryczne
porządkuje atomowe
momenty dipolowe



natężenie pola uporządkowanych
atomów jest przeciwne do
natężenia pola zewnętrznego



Dielektryki i prawo Gaussa

Bez dielektryka: $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E_0 S = q \Rightarrow E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S}$

Z dielektrykiem: $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 ES = q - q' \Rightarrow E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 S}$

Wprowadzimy ϵ_r przez wyrażenie

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 S} \Rightarrow q - q' = \frac{q}{\epsilon_r}$$

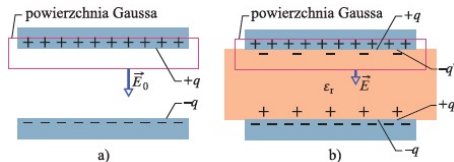
Prawo Gaussa dla dielektryka – całka strumienia zawiera $\epsilon_r \vec{E}$, a nie \vec{E}

$$\epsilon_0 \oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

Wektor $\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ nazywamy **indukcją elektryczną** \vec{D} . Wtedy prawo Gaussa w dielektryku

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

W ogólnym przypadku ϵ_r może nie być stałą na całej powierzchni Gaussa



Dodanie źródła wprowadza różnicę potencjałów i wytwarza pole elektryczne w przewodniku, a pole powoduje ruch ładunków

Natężenie prądu elektrycznego

Jeśli ładunek dq przechodzi przez płaszczyznę aa' w czasie dt , to natężenie prądu I przez płaszczyznę jest

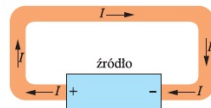
$$I = \frac{dq}{dt}$$

Jednostka: $A = C/s$ (amper = kulomb/sekunda)

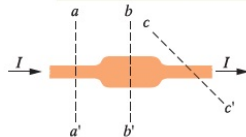
Ładunek jest zawsze zachowany. Dlatego

$$I_0 = I_1 + I_2$$

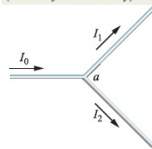
Strzałka prądu jest w kierunku, w którym poruszałyby się dodatnio naładowane nośniki



natężenie prądu ma taką samą wartość dla każdego przekroju



natężenie prądu wpływającego do węzła musi się równać natężeniu prądu wypływającego (ładunek jest zachowany)

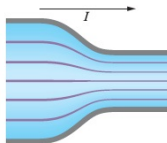


Gęstość prądu \vec{J} jest równa natężeniu prądu, przypadającemu na jednostkę pola powierzchni przekroju

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Jeśli \vec{J} jest prostopadłe do powierzchni i prąd jest stały, to

$$I = JS, \quad J = \frac{I}{S}$$



Oznaczmy prędkość unoszenia (dryfu) elektronów w polu elektrycznym v_d (w kierunku przeciwnym do pola \vec{E})

W półprzewodnikach i metalach $v_d \sim 10^{-5} \text{ m/s}$. Przy tym $v \sim 10^6 \text{ m/s}$

Liczba nośników w przewodniku o długości L jest równa nSL , gdzie n - gęstość nośników (liczba nośników na jednostkę objętości)

Całkowity ładunek w przewodniku o długości L : $q = enSL$.

Cały ten ładunek przepływa przez dowolny przekrój za czas $t = L/v_d$

$$\Rightarrow I = \frac{q}{t} = \frac{enSL}{L/v_d} = enSv_d$$

$$v_d = \frac{I}{enS} = \frac{J}{en}$$

W postaci wektorowej:

$$\vec{J} = en\vec{v}_d$$

gdzie en - gęstość ładunku nośników

Opór jest określony wzorem - definicja oporu:

$$R = \frac{U}{I}$$

Jednostka oporu: $\Omega = V/A$ (om = volt/amper)

Opór elektryczny właściwy

$$\rho = \frac{E}{J}$$

Jednostka: $[\rho] = \frac{V/m}{A/m^2} = \Omega \cdot m$

Przewodność elektryczna

$$G = \frac{1}{R}$$

Jednostka przewodności : $[G] = \frac{1}{\Omega} = S$ (Simens)

Przewodność elektryczna właściwa (konduktancja)

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

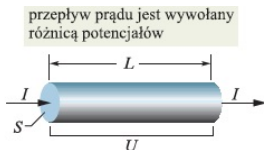
Jednostka przewodności właściwej: $[\sigma] = \frac{S}{m}$

Opór przewodnika

$$R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{JS} = \rho \frac{L}{S}$$

gdzie korzystaliśmy ze wzorów $U = EL$, $I = JS$, $\rho = E/J$

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

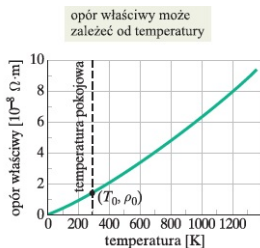


Zależność oporu od temperatury

Wzór empiryczny zależności oporu właściwego od temperatury

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \alpha (T - T_0)$$

gdzie ρ_0 - opór właściwy przy $T = T_0$, α - współczynnik temperaturowy oporu właściwego



Material	Opór elektryczny właściwy ρ [$\Omega \cdot m$]	Współczynnik temperaturowy oporu właściwego α [K^{-1}]
<i>Typowe metale</i>		
Srebro	$1,62 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
Miedź	$1,69 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Złoto	$2,35 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$
Glin	$2,75 \cdot 10^{-8}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$
Manganin ^a	$4,82 \cdot 10^{-8}$	$0,002 \cdot 10^{-3}$
Wolfram	$5,25 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
Żelazo	$9,68 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
Platyna	$10,6 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
<i>Typowe półprzewodniki</i>		
Czysty krzem	$2,5 \cdot 10^3$	$-70 \cdot 10^{-3}$
Krzem typu n ^b	$8,7 \cdot 10^{-4}$	
Krzem typu p ^c	$2,8 \cdot 10^{-3}$	
<i>Typowe izolatory</i>		
Szkło	$10^{10} - 10^{14}$	
Stopiony kwarc	$\sim 10^{16}$	

Prawo Ohma:

Natężenie prądu, płynącego przez przewodnik jest zawsze wprost proporcjonalne do różnicy potencjałów, przyłożonej do przewodnika

Element obwodu spełnia prawo Ohma, gdy jego opór nie zależy od wartości i polaryzacji przyłożonej różnicy potencjałów

Materiał przewodzący spełnia prawo Ohma, gdy opór właściwy materiału nie zależy od wartości i kierunku przyłożonego pola elektrycznego



b)



c)

Elektron w polu \vec{E} doznaje przyspieszenia

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$$

Czas średni między zderzeniami: τ

W czasie τ elektron uzyska prędkość unoszenia v_d

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}$$

Gęstość prądu elektrycznego

$$J = env_d = \frac{e^2 n E \tau}{m} = \frac{e^2 n \tau}{m} E$$

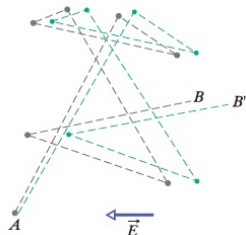
Przewodność elektryczna

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m}$$

Średnia droga swobodna elektronu

$$\ell = v\tau$$

gdzie v - średnia prędkość ($v \gg v_d$)



Ilość ładunku przeniesionego w przedziale czasu dt

$$dq = I dt$$

Wartość zmiany energii potencjalnej

$$dE_p = dq U = I dt U$$

Moc, związana z przekazaniem energii elektrycznej
(zamiana w ciepło)

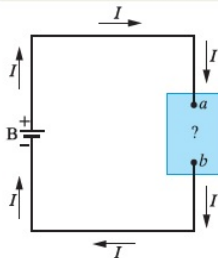
$$P = \frac{dE_p}{dt} \Rightarrow P = IU$$

- energia elektryczna przekazana w jednostkę czasu

Jednostka: Wat $1W = 1V \cdot A = 1 \frac{J}{C} \cdot \frac{C}{s} = 1 \frac{J}{s}$

$$R = \frac{U}{I} \Rightarrow P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

źródło po lewej stronie obwodu
dostarcza energię elektronom
przewodnictwa tworząc prąd



Właściwości elektryczne miedzi i krzemu

Właściwość	Miedź	Krzem
Typ materiału	metal	półprzewodnik
Koncentracja nośników ładunku, m^{-3}	$8,49 \cdot 10^{28}$	$1 \cdot 10^{16}$
Opór właściwy, $\Omega \cdot m$	$1,69 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^3$
Współczynnik temperaturowy oporu właściwego, K^{-1}	$+4,3 \cdot 10^{-3}$	$-70 \cdot 10^{-3}$

Opór właściwy krzemu można znacznie zmniejszyć przez **domieszkowanie** (dodanie niewielu określonych atomów domieszkowych)

W izolatorze jest dość duża energia uwolnienia elektronów, aby mogły się poruszać w materiale. Energia termiczna jest dla tego niewystarczająca. Dlatego nie ma wolnych elektronów.

W półprzewodniku energia uwolnienia elektronów nie jest tak duża jak w izolatorach

Wzór na przewodnictwo

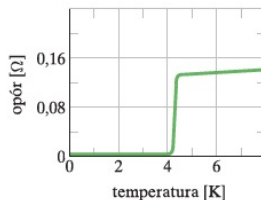
$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

n jest duża i stała w metalach

n jest mała i zależy od T w półprzewodnikach

Opór właściwy rtęci znika całkowicie przy $T < 4 \text{ K}$
(Kamerlingh Onnes, 1911)

Ładunek może płynąć przez nadprzewodnik bez strat energii. Prądy w pierścieniu mogą płynąć przez wiele lat bez zmniejszenia



Najlepsze przewodniki (srebro, miedź) nie mogą być nadprzewodnikami, a nadprzewodniki ceramiczne są w normalnych warunkach izolatorami

Istnieje przyciąganie między elektronami i tworzą się pary (pary Coopera) - to zabezpiecza właściwości nadprzewodniczące

Siła elektromotoryczna (SEM)

Źródło SEM - urządzenie, które wykonuje pracę nad nośnikami ładunku, utrzymując różnicę potencjałów między parą swych zacisków

Źródła SEM: prądnica, ogniwo elektryczne (bateria), ogniwo słoneczne, termoogniwo, itd.

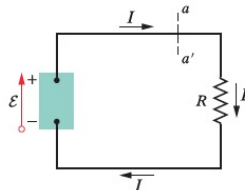
$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

gdzie dW - praca wykonana nad ładunkiem dq aby zmusić do ruchu

Siłą elektromotoryczną źródła SEM jest praca, przypadająca na jednostkę ładunku, jaką wykonuje źródło, przenosząc ładunek z bieguna o mniejszym potencjale do bieguna o większym potencjale

Jednostka SEM: Wolt, $1V = 1 \frac{J}{C}$

Doskonałe źródło nie wykazuje żadnego oporu wewnętrznego



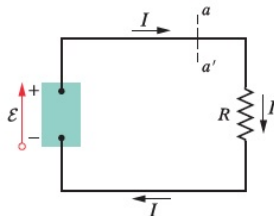
Praca wykonana przez baterię nad ładunkiem dq

$$dW = \varepsilon dq = \varepsilon I dt$$

Praca wykonana przez baterię jest równa energii termicznej wytworzonej w oporniku

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt \Rightarrow \varepsilon = IR$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

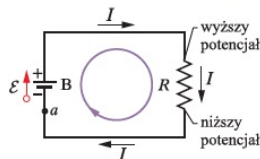


Algebraiczna suma zmian potencjału napotykanym przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zero

$$V_a + \varepsilon - IR = V_a \Rightarrow \varepsilon - IR = 0$$

Gdy przemieszczamy się w kierunku prądu I , zmiana potencjału wynosi $-IR$. Zmiana potencjału w źródle SEM wynosi $+\varepsilon$

bateria wymusza przepływ prądu przez opornik od wyższego do niższego potencjału



II prawo Kirchhoffa:

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

gdzie r - opór wewnętrzny

Oporniki połączone szeregowo

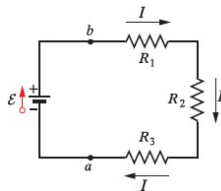
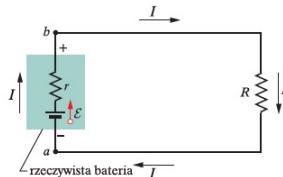
$$\varepsilon - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\varepsilon}{R_{rw}}$$

gdzie R_{rw} - równoważny opór

n oporników połączonych szeregowo

$$R_{rw} = \sum_{i=1}^n R_i$$



Różnica potencjałów

$$V_b - IR = V_a$$

$$V_b - V_a = IR = \varepsilon \frac{R}{R + r}$$

Aby znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami obwodu, należy rozpocząć w punkcie b , przejść dowolną drogą do punktu a i dodać algebraicznie napotkane zmiany potencjału

Moc, potencjał i SEM

Szybkość przekazywania energii ze źródła

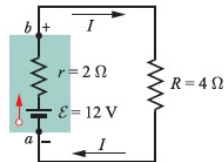
$$P = IU = I(\varepsilon - Ir) = I\varepsilon - I^2r$$

gdzie ostatni człon I^2r - moc, rozproszona w źródle

Moc źródła SEM:

$$P_{SEM} = I\varepsilon$$

opór wewnętrzny zmniejsza różnicę potencjałów pomiędzy biegunami



Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

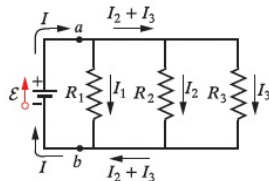
$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

$$\frac{U}{R_{rw}} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

W przypadku n oporników połączonych równolegle

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

różnica potencjałów na opornikach połączonych równolegle i ich oporze równoważnym jest taka sama

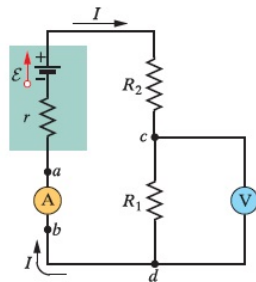


Amperomierz - przyrząd używany do pomiaru natężenia prądu

Woltomierz - miernik do pomiaru różnicy potencjałów

Opór R_A jest bardzo mały

Opór R_V jest bardzo duży



Ładowanie kondensatora

$$\varepsilon - IR - U_c = 0,$$

$$U_c = \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon,$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

- równanie ładowania

Rozwiązanie równania

$$q = C\varepsilon \left(1 - e^{-t/RC}\right), \quad I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}, \quad U_c = \varepsilon \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

gdzie $\tau = RC$ - stała czasowa

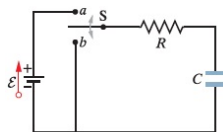
Rozładowanie kondensatora

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

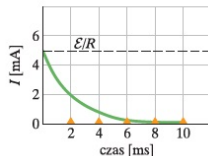
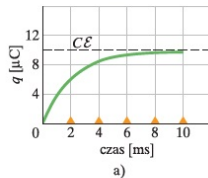
Rozwiązanie

$$q = q_0 e^{-t/RC}, \quad I = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

gdzie q_0 - początkowy ładunek na kondensatorze



ładunek kondensatora rośnie równocześnie z maleeniem natężenia prądu w oporniku



Trzeba rozwiązać równanie różniczkowe 2-go rzędu liniowe **jednorodne** ze stałymi współczynnikami dla funkcji $y(x)$

$$y'' + py' + qy = 0$$

Wykorzystamy podstawienie uniwersalne

$$y(x) = e^{kx} \Rightarrow y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$$

Dostajemy równanie charakterystyczne dla stałej k

$$k^2 + pk + q = 0$$

które ma dwa rozwiązania k_1, k_2

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego przy $k_1 \neq k_2$

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego przy $k_1 = k_2$

$$y(x) = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

gdzie C_1, C_2 - *const*

Równanie **niejednorodne**

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Ogólne rozwiązanie niejednorodnego równania

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

gdzie $y_0(x)$ - rozwiązanie z $f(x) = 0$, $y_1(x)$ - szczególne rozwiązanie niejednorodnego równania

Przykład: Ładowanie kondensatora w obwodzie RC

Trzeba rozwiązać równanie niejednorodne

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

1) Równanie jednorodne

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$$

$$q = e^{kt} \Rightarrow k = -\frac{1}{RC}, \quad q_0(t) = Be^{-t/RC}$$

gdzie $B = \text{const}$

2) Szczególne rozwiązanie: $q_1(t) = \varepsilon C$

3) Ogólne rozwiązanie

$$q(t) = Be^{-t/RC} + \varepsilon C$$

4) Warunek początkowy: Przy $t = 0$ powinno być $q = 0 \Rightarrow B = -\varepsilon C$

W wyniku dostajemy

$$q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC})$$

Pole magnetyczne

Siła Lorentza działająca na cząstkę w polu magnetycznym \vec{B}

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

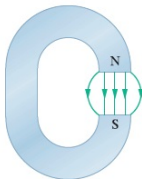
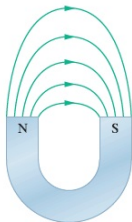
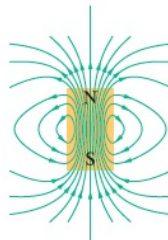
Przy $\vec{v} \perp \vec{B}$ wyznaczmy wartość **indukcji pola magnetycznego**

$$B = \frac{F_B}{|q|v}$$

Jednostka indukcji pola magnetycznego

$$1 \text{ tesla} = 1 T = 1 \frac{N}{A \cdot m}$$

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gausów}$$



linie pola będą
od północnego
do południowego
bieguna magnesu

Napięcie Halla $U = E \cdot d$ (Edwin Hall, 1879)

Gdy siły elektryczna i magnetyczna się równoważą,

$$F_E = F_B$$

$$eE = ev_d B \Rightarrow v_d = \frac{E}{B}$$

Prędkość unoszenia

$$v_d = \frac{I}{neS}$$

gdzie I/S - gęstość prądu, n - koncentracja nośników (elektronów)

$$n = \frac{I}{v_d e S} = \frac{I}{e S} \frac{B}{E} = \frac{IBd}{eSU}$$

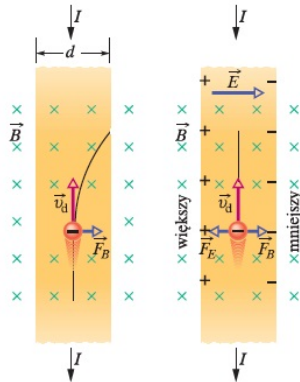
$$\Rightarrow n = \frac{IB}{e\ell U}$$

gdzie $\ell = S/d$ - grubość paska.

Z tego równania możemy wyznaczyć gęstość nośników.

Napięcie Halla

$$U = \frac{1}{en\ell} IB$$



Ruch cząstek naładowanych w polu magnetycznym

Ruch obrotowy w wyniku działania siły dośrodkowej F_B

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

Z tego równania znajdziemy promień toru cząstki

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Okres w ruchu obrotowym

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

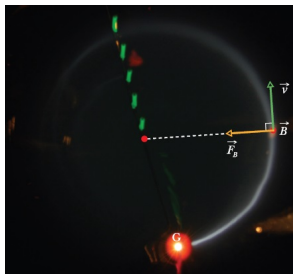
Częstość

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Częstość kołowa

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{qB}{m}$$

W ten sposób można zmierzyć masę cząstki m .



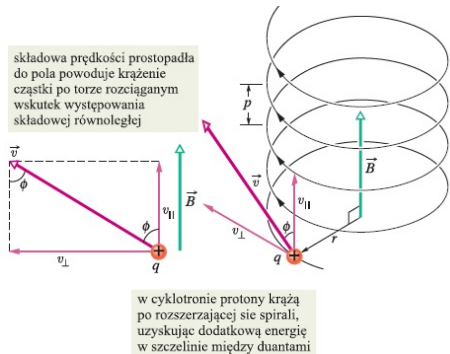
Wektor prędkości cząstki \vec{v} ma dwie składowe

$$v_{||} = v \cos \phi, \quad v_{\perp} = v \sin \phi$$

(wzdłuż pola i prostopadłe do pola magnetycznego \vec{B}).

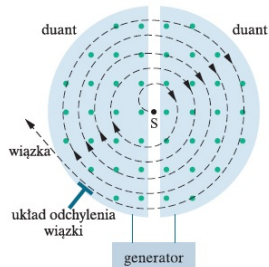
Pole magnetyczne nie wpływa na ruch cząstki naładowanej wzdłuż pola.

Ruch śrubowy jest złożony: prostoliniowy wzdłuż pola i obrotowy wokół pola



Cyklotrony i synchrotrony

Jednorodne pole magnetyczne skierowane prostopadłe przed płaszczyznę rysunku



Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

Całkowity ładunek, przepływający w czasie $t = L/v_d$ przez płaszczyznę xx

$$q = It = I \frac{L}{v_d}$$

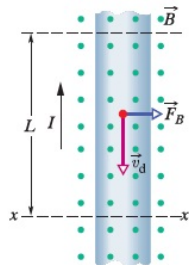
Siła działająca na ładunek q ($\vec{B} \perp \vec{I}$)

$$F_B = qv_d B = I \frac{L}{v_d} v_d B = ILB$$

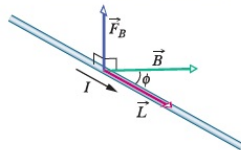
W ogólnym przypadku w postaci wektorowej

$$\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}$$

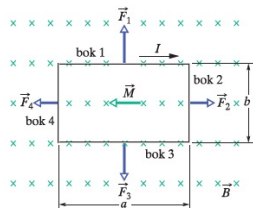
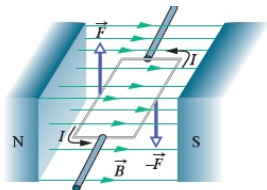
gdzie \vec{L} - wektor długości



siła jest prostopadła zarówno do pola magnetycznego, jak i do kierunku przepływu prądu



Moment siły, działający na ramkę z prądem



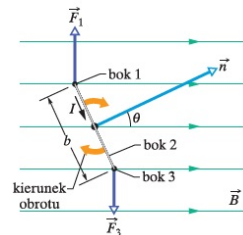
Moment siły, działający na ramkę z prądem

$$M' = IBab \sin \theta$$

Moment siły, działający na cewkę

$$M = NM' = NIBS \sin \theta$$

gdzie $S = ab$ - pole powierzchni ramki, N - ilość zwojów



Dipolowy moment magnetyczny

Wprowadzimy moment magnetyczny cewki $\mu = NIS$

$$\Rightarrow M = \mu B \sin \theta$$

W postaci wektorowej

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

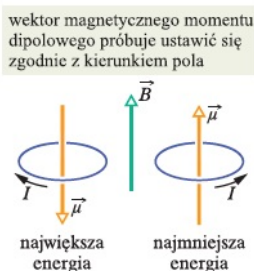
Równanie jest podobne do momentu siły działającej na dipol elektryczny $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

Magnetyczna energia potencjalna, którą ma dipol magnetyczny w polu magnetycznym \vec{B}

$$E_p(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

(Dla dipola elektrycznego $E_p(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$)

Magnez jest również dipolem magnetycznym



Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu

Prawo Biota-Savarta

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

gdzie

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \simeq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

- przenikalność magnetyczna próżni

Przewód prostoliniowy

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

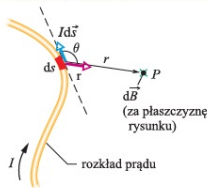
Wyprowadzenie:

$$B = 2 \int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta ds}{r^2}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

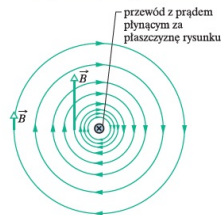
gdzie $r = \sqrt{s^2 + R^2}$,

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}$$

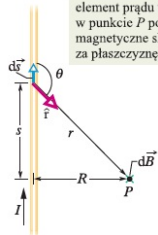
element prądu wytwarza w punkcie P pole magnetyczne skierowane za płaszczyznę rysunku



w dowolnym punkcie wektor pola magnetycznego jest styczny do odpowiedniego okręgu



element prądu wytwarza w punkcie P pole magnetyczne skierowane za płaszczyznę rysunku



Siły działające między równoległymi przewodami z prądem

Prąd w przewodzie a wytwarza pole magnetyczne

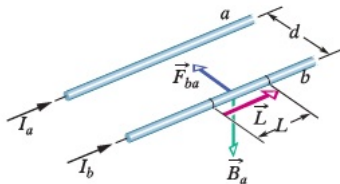
$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}$$

Siła Lorentza, która działa na przewód b

$$\vec{F}_{ba} = I_b \vec{L} \times \vec{B}_a \Rightarrow F_{ba} = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}$$

Przewody, w których płyną prądy równoległe, przyciągają się, a te, w których płyną prądy antyrównoległe, się odpychają

pole magnetyczne wytwarzane przez przewód a w miejscu przewodu b powoduje występowanie siły działającej na przewód b



Całka wzdłuż zamkniętego konturu

$$\sum \vec{B} \cdot \Delta \vec{s} \rightarrow \lim_{\Delta \vec{s} \rightarrow 0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Prawo Ampère'a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p$$

gdzie I_p - natężenie całkowite prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną przez kontur całkowania

Przykład zastosowania

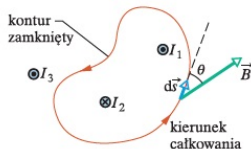
Cyrkulacja pola wzdłuż konturu

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta ds = B \oint ds = B \cdot 2\pi r$$

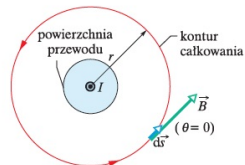
Prawo Ampère'a

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

w prawie Ampère'a bierze się pod uwagę tylko prądy przecinające powierzchnię ograniczoną konturem całkowania



całość prądu przecina powierzchnię ograniczoną konturem, a więc całość powinna być uwzględniona w prawie Ampère'a



Pole magnetyczne solenoidu

Cyrkulacja pola wzdłuż konturu (solenoid idealny)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh$$

Całkowity prąd przez powierzchnię ograniczoną konturem:

$$I_p = Inh,$$

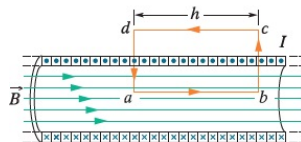
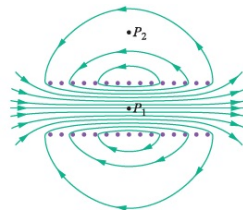
gdzie n - liczba zwojów na jednostkę długości

Prawo Ampère'a

$$Bh = \mu_0 Inh$$

Z tego równania dostajemy pole magnetyczne wewnątrz solenoidu

$$B = \mu_0 In$$



Cewka z prądem jako dipol magnetyczny

Na cewkę w polu magnetycznym \vec{B} działa moment siły

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

gdzie $\vec{\mu}$ - dipolowy moment magnetyczny cewki

Wartość dipolowego momentu magnetycznego cewki

$$\mu = NIS,$$

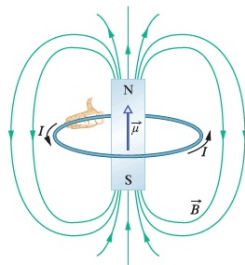
gdzie N - liczba zwojów, S - pole powierzchni, ograniczonej obwodem z prądem

Pole magnetyczne cewki

Pole wzdłuż osi z cewki z prądem

$$\vec{B}(z) \simeq \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

- przy $|z| \gg R$, gdzie R - promień cewki.



Indukcja Faradaya

Siła elektromotoryczna jest indukowana w pętli gdy zmienia się liczba linii pola magnetycznego, przechodzących przez pętlę

Prawo indukcji Faradaya

SEM indukcji

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

gdzie Φ_B - strumień magnetyczny przez powierzchnię S :

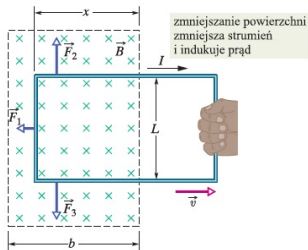
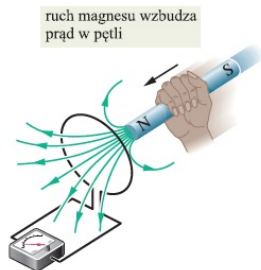
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- całka po powierzchni

Wartość siły elektromotorycznej indukowanej w przewodzącej pętli jest równa szybkości zmiany strumienia magnetycznego, przechodzącego przez pętlę

Jednostka strumienia pola magnetycznego:

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$$

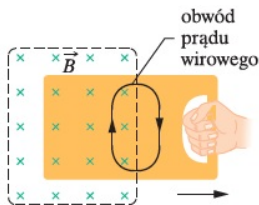


Kierunek indukowanego prądu jest określony przez prawo Lenza:

Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje



- Prądy elektryczne indukowane zmiennym polem magnetycznym powstają w przewodnikach o różnych kształtach i rozmiarach
- Elektrony przewodnictwa krążą po torach wirowych
- Energia prądu indukowanego zamienia się w większości w ciepło, ze względu na opór przewodnika



Indukowane pola elektryczne

Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne nawet w próżni bez obecności ładunków

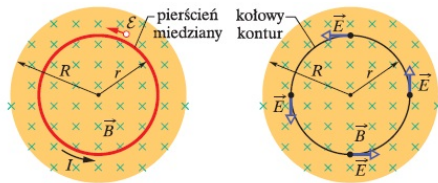
Siła elektromotoryczna:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

gdzie całkowanie - wzdłuż konturu zamkniętego

Dostajemy prawo Faradaya dla indukowanego pola elektrycznego

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$



Definicja indukcyjności cewki L :

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

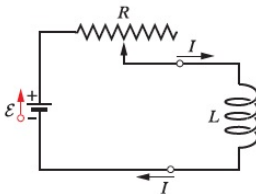
gdzie Φ_B – strumień magnetyczny, I – prąd, N – ilość zwojów

Jednostka indukcyjności: $1 \text{ henr} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$

Indukcyjność solenoidu

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(n\ell)(BS)}{I} = \frac{(n\ell)(\mu_0 I n)(S)}{I} = \mu_0 n^2 \ell S$$

gdzie $B = \mu_0 I n$, n – ilość zwojów na jednostkę długości



Samoindukcja

SEM, która powstaje w cewce przy zmianie prądu

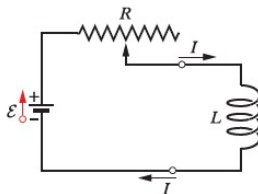
$$\varepsilon_L = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Korzystając z definicji indukcyjności cewki

$$N\Phi_B = LI$$

dostajemy SEM samoindukcji

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$



Włączamy prąd w obwodzie

Drugie prawo Kirchhoffa uwzględnia
SEM samoindukcji cewki

$$-IR - L \frac{dl}{dt} + \varepsilon = 0$$

Dostajemy równanie różniczkowe

$$L \frac{dl}{dt} + RI = \varepsilon$$

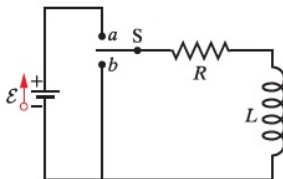
które ma rozwiązanie

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_L} \right)$$

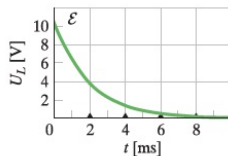
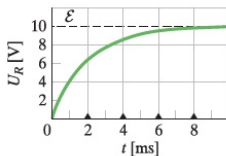
gdzie τ_L - stała czasowa,

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

Napięcie na oporniku $U_R = IR$;
napięcie na cewce $U_L = \varepsilon_L = L \frac{dl}{dt}$



różnica potencjałów na oporniku rośnie,
a różnica potencjałów na cewce maleje



Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

II prawo Kirchhoffa

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + IR$$

Przemnażamy na I

$$\varepsilon I = LI \frac{dI}{dt} + I^2 R$$

W lewej części εI - szybkość, z jaką źródło wykonuje pracę nad ładunkiem q : $\varepsilon I = \varepsilon dq/dt = dW/dt$

Pierwszy człon w prawej części można przedstawić jak

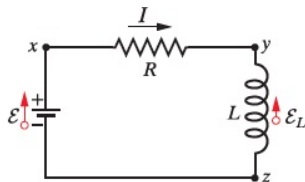
$$LI \frac{dI}{dt} = \frac{L}{2} \frac{dI^2}{dt} = \frac{dE_B}{dt}$$

gdzie E_B - energia pola magnetycznego w cewce

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2$$

Porównamy ze wzorem na energię pola elektrycznego w kondensatorze

$$E_E = \frac{q^2}{2C}$$



Definicja indukcji wzajemnej

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

albo

$$M_{21} I_1 = N_2 \Phi_{21}$$

Jeżeli prąd I będzie się zmieniał w czasie

$$M_{21} \frac{dI_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

Na mocy prawa Faradaya drugi człon w prawej części - SEM drugiej cewki: $-\varepsilon_2$

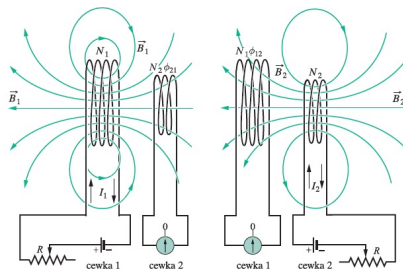
Dlatego dostajemy

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Analogicznie

$$\varepsilon_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

Przy tym $M_{21} = M_{12} = M$

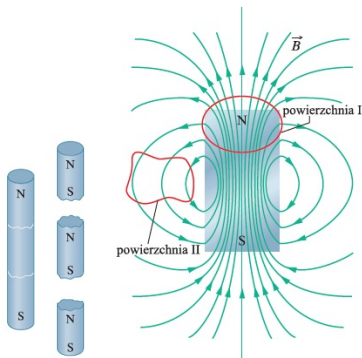


Wypadkowy strumień magnetyczny Φ_B przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy zero (monopole magnetyczne nie istnieją)

$$\Phi_B \equiv \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

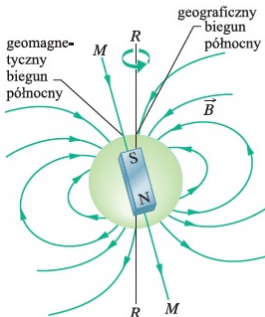
Prawo Gaussa dla pól elektrycznych

$$\Phi_E \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0}$$



Ziemskie pole magnetyczne jest polem, pochodzącym od dipola magnetycznego. Związany jest z nim dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$

na Ziemi południowy biegun dipola
leży w rzeczywistości na północy



Elektron ma swój własny moment pędu nazywany spinem \vec{S} .

Z tym spinem jest związany własny moment magnetyczny elektronu $\vec{\mu}_s$

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

gdzie $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ - ładunek i masa elektronu

Można zmierzyć składowe spinu wzdłuż pewnego kierunku z

$$S_z = m_s \hbar$$

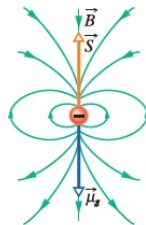
gdzie $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ - stała Diraca, $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ - stała Planka, $m_s = \pm 1/2$ - magnetyczna spinowa liczba kwantowa

Odpowiednio z-składowa momentu magnetycznego

$$\mu_{s,z} = \mp \mu_B$$

gdzie $\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$ - magneton Bohra

spin elektronu jest skierowany przeciwnie do spinowego momentu magnetycznego tej cząstki



Orbitalny moment magnetyczny

Orbitalny moment pędu jest związany z kołowym ruchem elektronu. Kołowy ruch cząstki naładowanej daje moment magnetyczny

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{orb}$$

gdzie \vec{L}_{orb} - orbitalny moment pędu

Składowa orbitalnego momentu pędu wzdłuż osi z

$$L_{orb,z} = m_\ell \hbar$$

gdzie $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\text{wartos maksymalna})$ - orbitalna liczba kwantowa

Składowa orbitalnego magnetycznego momentu elektronu

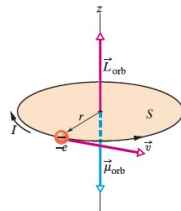
$$\mu_{orb,z} = -m_\ell \mu_B$$

Całkowity moment magnetyczny

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_{orb}$$

Energia potencjalna elektronu w polu magnetycznym

$$E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$



Indukowane pole magnetyczne

Zmienne pole elektryczne indukuje pole magnetyczne

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- całkowanie po konturu (kontur wybieramy dowolnie)

Porównamy ten wzór z prawem indukcji Faradaya: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

Przyjmujemy do uwagi, że prąd także generuje pole magnetyczne (prawo Ampère'a) i dostajemy

Uogólnione prawo Ampère'a

Zmienne pole elektryczne i prąd elektryczny indukują pole magnetyczne

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p$$

Uogólnione prawo Ampère'a można przedstawić w postaci

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{prz} + \mu_0 I_p$$

gdzie I_{prz} - prąd przesunięcia, zdefiniowany wzorem

$$I_{prz} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Prawo Gaussa dla elektryczności

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{wewn}}{\epsilon_0}$$

Prawo Gaussa dla magnetyzmu

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Prawo Faradaya

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Uogólnione prawo Ampère'a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p$$

Nazwa	Równanie	
prawo Gaussa dla elektryczności	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}}/\epsilon_0$	wiąże wypadkowy strumień elektryczny z wypadkowym ładunkiem elektrycznym objętym powierzchnią Gaussa
prawo Gaussa dla magnetyzmu	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	wiąże wypadkowy strumień magnetyczny z wypadkowym ładunkiem magnetycznym objętym powierzchnią Gaussa
prawo Faradaya	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	wiąże indukowane pole elektryczne ze zmiennym strumieniem magnetycznym
uogólnione prawo Ampère'a	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p$	wiąże indukowane pole magnetyczne ze zmiennym strumieniem elektrycznym oraz z prądem

Równania Maxwella

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

gdzie ρ - gęstość ładunku elektrycznego, \vec{j} - wektor gęstości prądu elektrycznego

Definicja dywergencji i rotacji pola

wektorowego $\vec{E}(\vec{r})$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V}$$

gdzie całkowanie - po powierzchni obejmującej element objętości V

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}{S}$$

gdzie całkowanie - wzdłuż zamkniętego konturu wokół elementu powierzchni S

Operator "nabla" - wektorowy operator różniczkowania

$$\vec{\nabla} = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Gradient skalarnego pola $\varphi(\vec{r})$

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = (\nabla_x \varphi, \nabla_y \varphi, \nabla_z \varphi)$$

Dywergencja pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z)$$

Rotacja pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (\nabla_y A_z - \nabla_z A_y, \nabla_z A_x - \nabla_x A_z, \nabla_x A_y - \nabla_y A_x)$$

Dla obliczenia składowych wektora $\text{rot } \vec{A}$ można korzystać się ze wzoru

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Można upewnić się, że zawsze $\text{div rot } \vec{A} = 0$ i $\text{rot grad } \varphi = 0$

Wprowadzimy skalarny potencjał $\varphi(\vec{r}, t)$ i wektorowy potencjał $\vec{A}(\vec{r}, t)$ pola elektromagnetycznego w taki sposób, że

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

W wyniku - dwa równania Maxwella są wykonane automatycznie

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ponieważ $\text{div rot } \vec{A} = 0$ i $\text{rot grad } \varphi = 0$

4-wektor wodzący x^i ma 4 składowe

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

4-wektorem A^i nazywamy zespół czterech wielkości A^0, A^1, A^2, A^3 , które przy przekształceniach 4-wymiarowego układu współrzędnych (w tym także przekształceń Lorentza) tak się przekształcają jak współrzędne 4-wektora wodzącego x^i

Przekształcenia Lorentza dla 4-wektora przy ruchu układu współrzędnych wzdłuż osi x z prędkością v

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c}A'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c}A'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3$$

Wprowadzimy kowektor A_i ze składowymi A_0, A_1, A_2, A_3 tak, że

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3$$

Będziemy posługiwali się zapisem

$$A^i = (A^0, \vec{A}), \quad A_i = (A_0, -\vec{A})$$

Na przykład, dla 4-wektora i 4-kowektora wodzącego

$$x^i = (ct, \vec{r}), \quad x_i = (ct, -\vec{r})$$

Przejście od 4-wektorów do 4-kowektorów można przedstawić w postaci macierzowej

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k$$

gdzie po powtarzających się dwukrotnie wskaźnikach wykonujemy sumowanie, tzn.

$$g_{ik} A^k \equiv \sum_k g_{ik} A^k.$$

g^{ik} lub g_{ik} – **tensor metryczny**

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kwadrat długości 4-wektora

$$A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$$

- nie zmienia się przy transformacji Lorentza

Kwadrat długości 4-wektora wodzącego

$$x^i x_i = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = ds^2$$

4-wektor prędkości w teorii relatywistycznej

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

gdzie wykorzystaliśmy $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$

Cząstka relatywistyczna w polu elektromagnetycznym

Działanie dla cząstki naładowanej w polu elektromagnetycznym

$$S = \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A^i dx_i \right)$$

gdzie $A^i = (\varphi, \vec{A})$ - 4-potencjał pola, φ - potencjał skalarny, \vec{A} - potencjał wektorowy

Z tego równania dostajemy działanie w postaci

$$S = \int_a^b \left(-mc ds - e\varphi dt + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{r} \right) = \int_a^b \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{v} \right) dt$$

Lagrangian cząstki w polu

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{v}$$

gdzie ostatni dwa człony - oddziaływanie cząstki z polem

Przy $v \ll c$ (dla cząstki nierelatywistycznej)

$$L \simeq \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$$

Równanie ruchu w mechanice Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Po podstawieniu lagrangianu L cząstki w polu elektromagnetycznym dostajemy równanie ruchu cząstki relatywistycznej

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

gdzie

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad - \text{ pęd cząstki}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Symetria równań ruchu względem zmiany znaku czasu:

$$t \rightarrow -t, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{E}, \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{B}$$

Działanie dla pola

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega$$

gdzie $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ - **tensor pola elektromagnetycznego**,

$d\Omega = c dt dx dy dz$ - 4-wymiarowy element objętości

Składowe tensora pola elektromagnetycznego

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Działanie dla cząstki relatywistycznej w polu elektromagnetycznym składa się z działania dla cząstki (pierwszy człon), działania dla pola (trzeci człon) i oddziaływania między nimi (drugi człon):

$$S = -mc \int_a^b ds - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega$$

gdzie j^i - 4-wektor prądu

$$j^i = \rho \frac{dx_i}{dt} = (c\rho, \vec{j})$$

ρ - gęstość ładunku, \vec{j} - trójwymiarowy wektor gęstości prądu

Pierwsza para równań Maxwella (w układzie jednostek CGS)

Z definicji $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$.

Z tych równań dostajemy pierwszą parę równań Maxwella

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Druga para równań Maxwella

Zmiana działania przy wariacji potencjału pola $A_i \rightarrow A_i + \delta A_i$

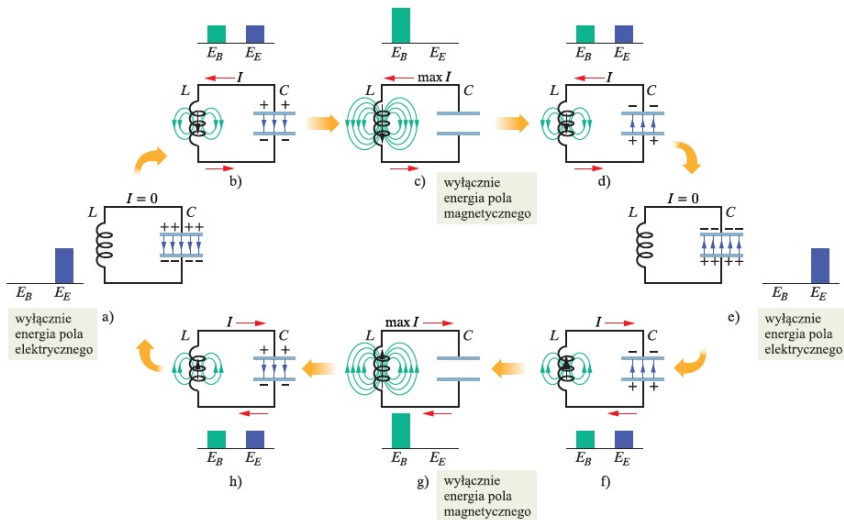
$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega$$

Z zasady najmniejszego działania $\delta S = 0$ dostajemy równanie ruchu dla pola

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

Po podstawieniu składowych tensora pola F^{ik} dostajemy drugą parę równań Maxwella

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho$$



Osiem faz jednego cyklu drgań w obwodzie LC

Energia pola elektromagnetycznego w obwodzie LC

Układ klocek–sprężyna		Obwód LC	
element	energia	element	energia
sprężyna	potencjalna, $\frac{1}{2}kx^2$	kondensator	elektryczna, $\frac{1}{2}(1/C)q^2$
klocek	kinetyczna, $\frac{1}{2}mv^2$	cewka	magnetyczna, $\frac{1}{2}LI^2$
$v = dx/dt$		$I = dq/dt$	

Energia pola elektromagnetycznego

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$$

Energia jest zachowana

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$$L \frac{dq}{dt} \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

Dostajemy równanie dla zależności ładunku na kondensatorze q od czasu

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

Rozwiązanie

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

Po podstawieniu tego rozwiązania w równanie różniczkowe dostajemy częstotliwość drgań

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Natężenie prądu w obwodzie

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

albo $I = -I_{\max} \sin(\omega t + \phi)$, gdzie $I_{\max} = \omega q_{\max}$

Energia pola

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$$

ale energia teraz nie jest zachowana

$$\frac{dE}{dt} = -I^2 R$$

czyli

$$LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -I^2 R$$

Po podstawieniu $I = dq/dt$ dostajemy równanie

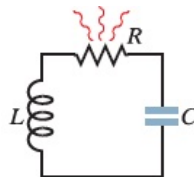
$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

Rozwiązanie

$$q = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi)$$

gdzie

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}$$



Ramka w ruchu obrotowym w jednorodnym polu magnetycznym:

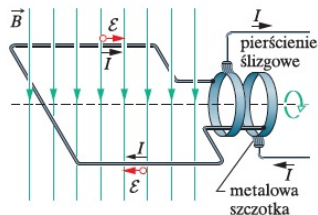
Na mocy prawa Faradaya w konturze powstaje indukowany prąd elektryczny

SEM i natężenie prądu prądnicy

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \sin(\omega_w t)$$

$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi)$$

gdzie ω_w - częstość kołowa SEM



Obwód z opornikiem

II prawo Kirchhoffa

$$\varepsilon - U_R = 0$$

SEM źródła:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \sin(\omega_w t)$$

Napięcie na oporniku

$$U_R = \varepsilon_{\max} \sin(\omega_w t) = U_{R \max} \sin(\omega_w t)$$

Natężenie prądu

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_{R \max}}{R} \sin(\omega_w t)$$

Prąd można przedstawić

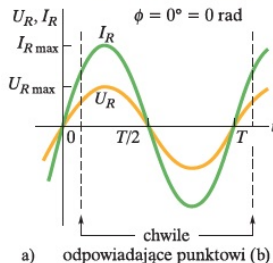
$$I_R = I_{R \max} \sin(\omega_w t - \phi)$$

gdzie

$$I_{R \max} = U_{R \max} / R, \quad \phi = 0$$



dla obciążenia oporowego
natężenie prądu i różnica
potencjałów są zgodne w fazie



Obciążenie pojemnościowe

Napięcie na okładkach kondensatora

$$U_C = U_{C \max} \sin(\omega_w t)$$

Ładunek zgromadzony na okładkach

$$q_c = CU_C = CU_{C \max} \sin(\omega_w t)$$

Prąd w obwodzie

$$I_C = \frac{dq_c}{dt} = \omega_w CU_{C \max} \cos(\omega_w t)$$

Wprowadzamy **reaktancję pojemnościową kondensatora**

$$X_C = \frac{1}{\omega_w C}$$

i dostajemy

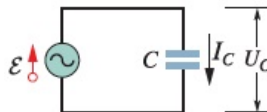
$$I_C = \frac{U_{C \max}}{X_C} \sin(\omega_w t + \pi/2)$$

Inaczej można przedstawić

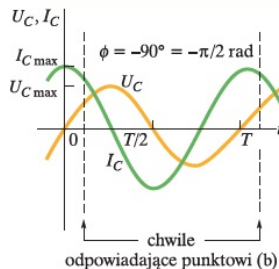
$$I_C = I_{C \max} \sin(\omega_w t - \phi)$$

gdzie

$$I_{C \max} = U_{C \max} / X_C, \quad \phi = -\pi/2$$



dla obciążenia pojemnościowego
natężenie prądu wyprzedza
różnicę potencjałów o 90°



Napięcie na cewce

$$U_L = U_{L \max} \sin(\omega_w t)$$

Korzystając ze wzoru $U_L = L \frac{dI_L}{dt}$ otrzymamy

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{U_{L \max}}{L} \sin(\omega_w t)$$

Rozwiązanie tego równania

$$I_L = \frac{U_{L \max}}{L} \int \sin(\omega_w t) dt = -\frac{U_{L \max}}{\omega_w L} \cos(\omega_w t)$$

Wprowadzimy **reaktancję induktywną cewki**

$$X_L = \omega_w L$$

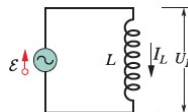
i dostajemy

$$I_L = \frac{U_{L \max}}{X_L} \sin(\omega_w t - \pi/2)$$

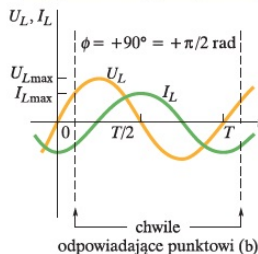
Przedstawiamy prąd

$$I_L = I_{L \max} \sin(\omega_w t - \phi)$$

gdzie $I_{L \max} = U_{L \max} / X_L$ $\phi = \pi/2$



dla obciążenia indukcyjnego
natężenie prądu opóźnia się o 90°
względem różnicy potencjałów



Element obwodu	Symbol	Opór lub reaktancja	Natężenie prądu	Faza początkowa ϕ	Związek amplitud
opornik	R	R	w takiej samej fazie jak U_R	$0^\circ (= 0 \text{ rad})$	$U_{R \max} = I_{R \max} R$
kondensator	C	$X_C = 1/\omega_w C$	wyprzedza U_C o $90^\circ (= \pi/2 \text{ rad})$	$-90^\circ (= -\pi/2 \text{ rad})$	$U_{C \max} = I_{C \max} X_C$
cewka	L	$X_L = \omega_w L$	opóźnia się względem U_L o $90^\circ (= \pi/2 \text{ rad})$	$+90^\circ (= +\pi/2 \text{ rad})$	$U_{L \max} = I_{L \max} X_L$

SEM i natężenie prądu

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \sin(\omega_w t)$$

$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t)$$

gdzie

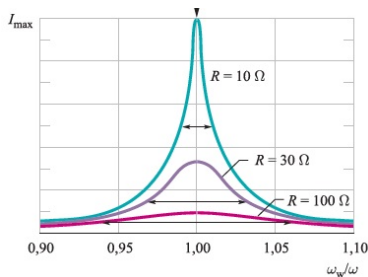
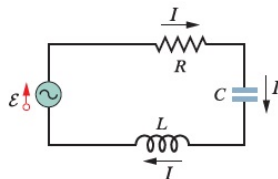
$$I_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{Z}$$

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ - impedancja obwodu

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - 1/\omega_w C)^2}}$$

Warunek rezonansu: $\omega_w = \omega$,

gdzie $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - częstość własna obwodu



Obwód z opornikiem

Szybkość rozpraszania energii na oporniku

$$P = I^2 R = [I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi)]^2 R = I_{\max}^2 R \sin^2(\omega_w t - \phi)$$

Średnia szybkość rozpraszania energii

$$P_{sr} = \frac{I_{\max}^2 R}{2} = I_{sk}^2 R$$

gdzie $I_{sk} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ - skuteczna wartość natężenia prądu

Zdefiniujemy skuteczne napięcie i SEM

$$U_{sk} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{sk} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Obwód RLC

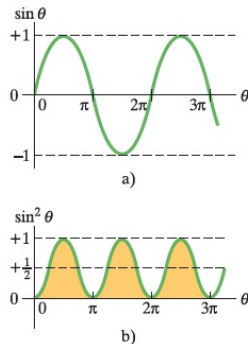
$$I_{sk} = \frac{\varepsilon_{sk}}{Z}$$

Szybkość rozpraszania energii na oporniku

$$P_{sr} = U_{sk} I_{sk} = (I_{sk} R) I_{sk} = \varepsilon_{sk} I_{sk} \frac{R}{Z} = \varepsilon_{sk} I_{sk} \cos \phi$$

gdzie $\cos \phi$ - współczynnik mocy

$$\cos \phi = \frac{U_{R \max}}{\varepsilon_{\max}} = \frac{I_{\max} R}{I_{\max} Z} = \frac{R}{Z}$$



Siła elektromotoryczna źródła

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \sin \omega t$$

SEM indukowana w obwodzie wtórnym

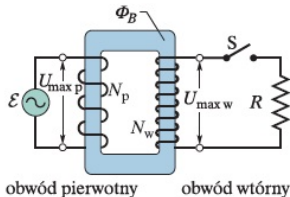
$$\varepsilon_z = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{U_p}{N_p} = \frac{U_w}{N_w}$$

gdzie ε_z - SEM w jednym zwoju, Φ_B - strumień pola magnetycznego, N_p i N_w - ilość zwojów w obwodzie pierwotnym i wtórnym

$$\Rightarrow U_w = U_p \frac{N_w}{N_p} - \text{transformacja napięcia}$$

Ponieważ energia jest zachowana $I_p U_p = I_w U_w$
transformacja prądów jest odwrotna do transformacji napięcia

$$I_w = I_p \frac{N_p}{N_w}$$



Schemat transformatora