Skalarny i wektorowy potencjały pola

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\\ \vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A}\end{aligned}}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$$

Wektory czterowymiarowe (czterowektory)

4-wektor wodzący x^i ma składowe

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Ogólnie: czterowektorem A^i nazywamy zespół czterech wielkości: A^0, A^1, A^2, A^3, które przy przekształceniach czterowymiarowego układu współrzędnych tak się przekształcają jak współrzędne 4-wektora wodzącego x^i.

Na przykład, w przypadku przekształcenia Lorentza

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c} A'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c} A'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3$$

Kowektor A_i: $A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3$

Będziemy posługiwali się zapisem:

$$\boxed{A^i = (A^0, \vec{A}), \quad A_i = (A_0, -\vec{A})}$$

4-wektor wodzący: $x^i = (ct, \vec{r}), \quad x_i = (ct, -\vec{r})$

Przejście od 4-wektorów do 4-kowektorów:

$$A_i = g_{ik} A^k \quad , \quad A^i = g^{ik} A_k$$

– sumowanie po k!

$A_1 = g_{10} A^0 + g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3$

....

gdzie g^{ik} lub g_{ik} – tensor metryczny:

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prędkość 4-wymiarowa

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \; , \; \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Kwadrat długości 4-wektora: $A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$
(nie zmienia się przy transformacjach Lorentza).

Kwadrat długości 4-wektora wodzącego: $x^i x_i = c^2 t^2 - r^2 = ds^2$

Cząsteczka w polu elektromagnetycznym

Działanie charakteryzujące ładunek w polu

$$S = \int_a^b \left(-mc\,ds - \frac{e}{c} A_i\,dx^i\right)$$, gdzie A^i – czteropotencjał pola

$$A^i = (\varphi, \vec{A})$$

$\varphi = A^0$ – potencjał skalarny

$\vec{A}$ – potencjał wektorowy

$$S = \int_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot d\vec{r} - e\varphi\,dt\right)$$

Funkcja Lagrange'a ładunku w polu elektromagnetycznym

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi \qquad S = \int L\,dt$$

Dla małych prędkości, $v \ll c$:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \underbrace{\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi}_{\text{oddziaływanie z polem}}$$

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

$\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$

Równanie ruchu ładunku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Równanie ruchu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,\vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

Natężenie pole elektrycznego:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

– pęd cząstki.

Natężenie pole magnetycznego

$$\boxed{\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}}$$

równanie ruchu

Symetria względem zmiany znaku czasu:

$$t \to -t$$
$$\vec{E} \to \vec{E}$$
$$\vec{B} \to -\vec{B}$$

Przy $v \ll c$:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{e\vec{E} + \frac{e}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}}_{\text{siła Lorentza}}$$

Działanie dla pola elektromagnetycznego

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega$$

$d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz =$
$= c\,dt\,dV$

gdzie F_{ik} – tensor pola elektromagnetycznego

– układ jednostek Gaussa

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \quad F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Działanie: cząsteczki + pole

$$S = -\sum\int mc\,ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i\,d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega$$

gdzie $\boxed{j^i = \rho\frac{dx^i}{dt}}$ – czterowektor prądu

$$j^i = (c\rho, \vec{j})$$

ρ – gęstość ładunku
$\vec{j}$ – trójwymiarowy wektor gęstości prądu

Równania pola elektromagnetycznego (w układzie CGS)

Pierwsza para równań Maxwella

Z definicji $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ i $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0} \qquad \boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$
$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$

Druga para równań

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\,\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right]d\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i$$

W postaci trójwymiarowej:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho}$$