Mechanika relatywistyczna

Rzeszów University of Technology

12 stycznia 2023

Literatura

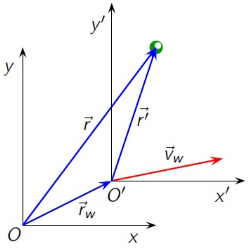
- D. Halliday, R. Resnik, J. Walker. Podstawy fizyki, tom 4.
- Fizyka dla szkół wyższych, tom 3. Openstax Polska.
- L.D. Landau, J.M. Lifszyc. Teoria pola.
- H. D. Young, R. A. Freedman. University Physics.
- Berkley Physics Course, tom 1.

Postulaty teorii względności

Mechanika relatywistyczna albo "szczególna teoria względności" - A. Einstein, 1905

1) Postulat względności: Dla wszystkich obserwatorów w inercjalnych układach odniesienia prawa fizyki są takie same

2) Postulat stałej prędkości światła: We wszystkich inercjalnych układach odniesienia i we wszystkich kierunkach światło rozchodzi się w próżni z tą samą prędkością c ($c \simeq 3 \cdot 10^8\ m/s$)



Zasada względności Galileusza $\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}\,'$ (zawsze $\vec{v} \neq \vec{v}\,'$) - sprzeczna z zasadą względności A. Einsteina

Zdarzenie - obserwator może wskazać, podając 3 wspólne przestrzenne i jedną współrzędną czasową (x, y, z, t) albo (x', y', z', t')

(x, y, z, t) - **współrzędne czasoprzestrzenne**

Synchronizacja zegarów w inercjalnym układzie odniesienia

Jeśli zegary 1 i 2 znajdują się w punktach 1 i 2 pewnego inercjalnego układu odniesienia, to synchronizacja – przez przesyłanie impulsu światła z punktu 1 do punktu 2

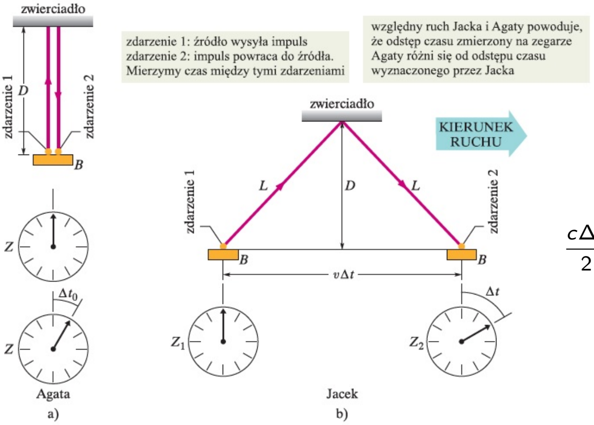
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta r}{c}$$

Względność jednoczesności

Jednoczesność zdarzeń: Dwaj obserwatory, poruszający się względem siebie, na ogół nie będą zgodni co do jednoczesności zdarzeń. Jeżeli jeden z obserwatorów stwierdzi, że zdarzenia były jednoczesne, to drugi na ogół będzie innego zdania.

Jednoczesność nie jest pojęciem absolutnym, lecz względnym i zależy od ruchu obserwatora

Względność czasu: Odstęp czasu między zdarzeniami zależy od tego, w jakiej odległości od siebie one nastąpili zarówno w przestrzenie, jak i w czasie. Oznacza to, że przestrzenne i czasowe odległości zdarzeń są ze sobą powiązane.



$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}, \quad \Delta t = \frac{2L}{c}$$

$$L = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + D^2}$$

$$\frac{c\Delta t}{2} = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t_0}{2}\right)^2}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Odstęp czasu w różnych układach odniesienia

Odstęp czasu

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t > \Delta t_0$$

Odstęp czasu zmierzony dla dwóch zdarzeń, które zaszły w tym samym miejscu w inercjalnym układzie odniesienia, będziemy nazywać odstępem czasu własnego lub **czasem własnym**

Mierząc w jakimkolwiek innym inercjalnym układzie odniesienia odstęp czasu dzielący te same zdarzenia, zawsze otrzymamy *większą wartość*

Różnica $\Delta t - \Delta t_0$ - **dylatacja czasu** (rozciągnięcie czasu)

Współczynnik Lorentza $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, gdzie $\beta = v/c < 1$

Dylatacja czasu: $\Delta t = \gamma \Delta t_0$

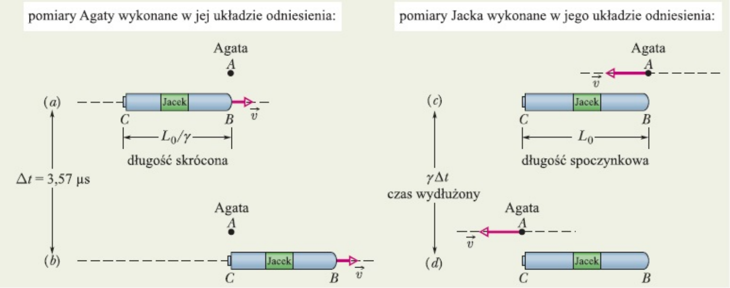
$L_0 = v\Delta t$ - długość mierzona w układzie odniesienia, związanym ze statkiem (Jacek)

$L = v\Delta t_0$ - długość mierzona w spoczynkowym układzie odniesienia (Agata)

$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\beta^2}$ - skrócenie długości

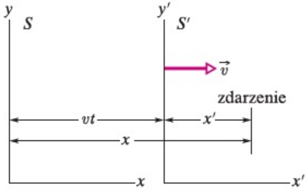
Długosz obiektu L_0 mierzona w jego układzie spoczynkowym nazywamy **długością własną** lub długością spoczynkową

Pomiary długości przeprowadzone w innym układzie odniesienia, który porusza się względem obiektu równoległe do mierzonej długości, dają zawsze wynik mniejszy, niż długość własna



Transformacja Lorentza:

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$



Dla pary zdarzeń:

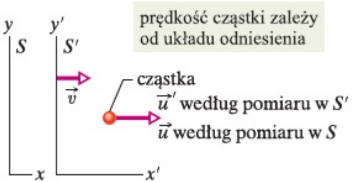
$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$
$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

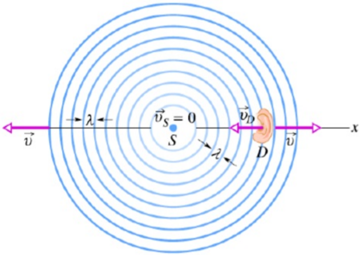
Względność prędkości

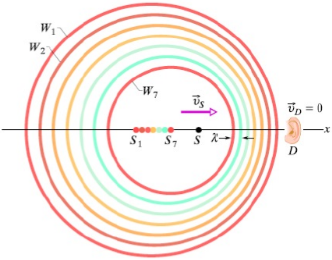
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta xx/c^2}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$$

gdzie $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ i $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ - prędkości ciała w różnych układach odniesienia







Długość fali dźwiękowej rejestrowanej detektorem D

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - v_s/v\right) \tag{1}$$

gdzie v i λ_0 - prędkość dźwięku i długości fali dźwiękowej w powietrzu, v_s - prędkość ruchu źródła dźwięku

Zjawisko Dopplera dla światła w mechanice relatywistycznej

Częstość mierzona w różnych układach odniesienia (źródło i detektor oddalają się od siebie)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \qquad \beta = v/c$$

gdzie ν_0 -częstość własna źródła światła (mierzona w układzie odniesienia źródła), v - prędkość obserwatora poruszającego się względem źródła

Dla małych prędkości względnych, $\beta \ll 1$ dostajemy $\nu \simeq \nu_0 \left(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2\right)$

Przy oddalaniu albo zbliżaniu gwiazdy od nas / do nas $\nu \simeq \nu_0(1 \pm \beta)$. Przez długości fali

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

gdzie λ_0 - własna długość fali

Z tego równania dostajemy prędkość gwiazdy

$$v = \pm \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}\, c = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\, c$$

gdzie $\Delta\lambda$ -dopplerowskie przesunięcie długości fali

Jesli źródło oddala się od nas, to $\lambda > \lambda_0$ (przesunięcie ku czerwieni). Jeżeli źródło porusza się w naszą stronę, to $\lambda < \lambda_0$ (przesunięcie ku błękitowi)

Poprzeczne zjawisko Dopplera

Zmiana częstotliwości światła w poprzecznym zjawisku Dopplera

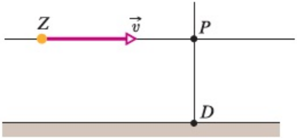
$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

Przy $\beta \ll 1$ (małe prędkości) dostajemy $\nu = \nu_0 (1 - \beta^2/2)$

Poprzeczne zjawisko Dopplera jest przejawem dylatacji czasu.

$$T = \gamma T_0$$

gdzie $T_0 = 1/\nu_0$ i $T = 1/\nu$ - własny okres drgań źródła i okres drgań obserwowany przez detektora



Z - źródło światła, D - detektor

Pęd cząstki

Pęd nierelatywistyczny $p = mv = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Pęd relatywistyczny

$$p = \frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \gamma m v$$

Uogólnienie do postaci wektorowej

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Energia cząstki

Energia cząstki w mechanice relatywistycznej

$$E = \gamma m c^2$$

Przy $\beta \ll 1$: rozwiniecie w szereg $\gamma \simeq 1 + \beta^2/2$

$$E \simeq E_0 + \frac{mv^2}{2}$$

gdzie $E_0 = mc^2$ - **energia spoczynku cząstki**

Energia kinetyczna cząstki

$$E_k = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$
$$E_k = mc^2(\gamma - 1)$$

Związek energii i pędu

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$$

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \qquad E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$$

W mechanice nierelatywistycznej $p = mv$ i $E = p^2/2m$.

Jeśli $\Delta x \ll x$ to możemy wykorzystać rozwinięcie w szereg (wzór Taylora)

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \ldots \tag{2}$$

Przykład (szereg Newtona): Przy $\beta \ll 1$

$$(1+\beta)^n = 1 + n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\beta^2 + \ldots \tag{3}$$

Przykład 2:

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = (1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} = \left(1 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2\right) \simeq 1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 \tag{4}$$

Zdarzenie można przedstawić jako punkt 4-wymiarowej czasoprzestrzeni (**punkt świata**)

Interwał Δs_{12} między zdarzeniami 1 i 2 z definicji

$$\Delta s_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2 - \Delta y_{12}^2 - \Delta z_{12}^2$$

Interwał w różnych układach odniesienia jest ten sam, $\Delta s_{12} = \Delta s_{12}'$.

Przestrzeń, w której odległość między punktami przestrzeni jest zdefiniowana w taki sposób (przez interwał między punktami) - pseudo-euklidesowa przestrzeń Minkowskiego. Dlatego geometria czasoprzestrzeni - **geometria Minkowskiego**.

Przekształcenie Lorentza dla współrzędnych x, t : $x = \gamma(x' + vt')$, $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$ można przedstawić jak "obroty" na kąt $\psi = \operatorname{arctanh}(v/c)$

$$x = x' \cosh\psi + ct' \sinh\psi$$
$$ct = x' \sinh\psi + ct' \cosh\psi$$

Zespół współrzędnych (ct, x, y, z) można przedstawić jak składowe 4-wektora wodzącego (x_0, x_1, x_2, x_3) w 4-wymiarowej czasoprzestrzeni. Kwadrat długości 4-wektora wodzącego s^2 przedstawiamy w postaci

$$g_{00}x_0^2 + g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2$$

gdzie $g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}$ - składowe **tensora metrycznego**, który definiuje właściwości geometryczne 4-przestrzeni. *W płaskiej czasoprzestrzeni, która nie jest zakrzywiona przez pole grawitacyjne*, $g_{00} = 1$, $g_{11} = -1$, $g_{22} = -1$, $g_{33} = -1$.