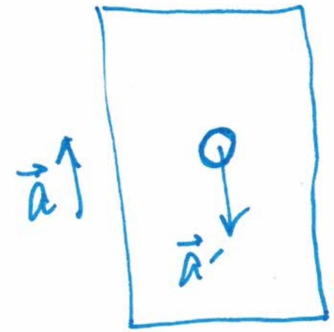
Grawitacja według Einsteina

Podstawowym postulatem teorii grawitacji jest zasada równoważności: skutki grawitacji i ruchu przyspieszonego są sobie równoważne.

Według Einsteina przyczyną grawitacji jest zakrzywienie (odkształcenie) przestrzeni powodowane przez masy. Zakrzywienie dotyczy czasoprzestrzeni (czterowymiarowej).



Gdy światło przebiega w pobliżu Ziemi, jego tor nieco się zakrzywia ze względu na krzywiznę przestrzeni w otoczeniu Ziemi. Zjawisko to nazywa się ogniskowaniem (soczewkowaniem) grawitacyjnym.

Płyny

– pod tą nazwą rozumiemy ciecze i gazy

płyn – w odróżnieniu od ciała stałego – to substancja zdolna do przepływu.

Gęstość

$$\rho_{śr} = \frac{\Delta m}{\Delta V}, \qquad \boxed{\rho = \lim_{\Delta V} \frac{\Delta m}{\Delta V}}$$

m, V – masa i objętość próbki.

wielkość skalarna

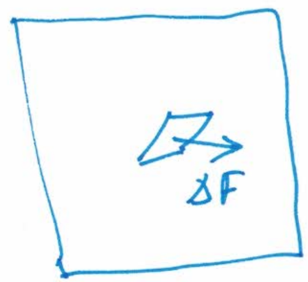
$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

substancja	ρ
powietrze (1atm.)	1,21
woda	$0{,}998 \cdot 10$
żelazo	$7{,}9 \cdot 10^3$
Ziemia	$5{,}5 \cdot 10^3$
Biały karł	10^{10}
Gwiazda neutronowa	10^{18}

Gęstość gazu bardzo silnie zależy od ciśnienia, a gęstość cieczy zależy od ciśnienia nieznacznie

Ciśnienie

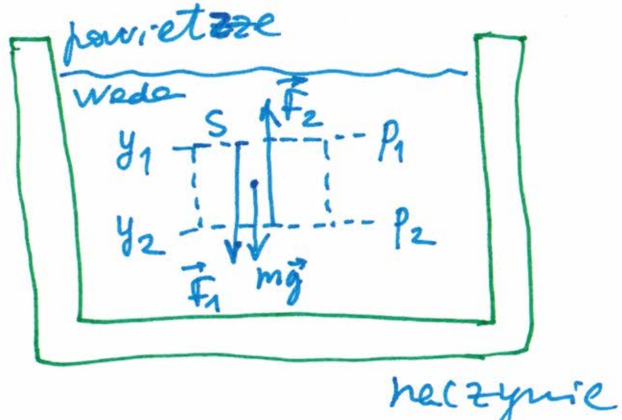
$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



Jednostka ciśnienia Paskal $\quad [p] = Pa = \frac{kg}{m^2}$

$1 atm = 1{,}01 \cdot 10^5 \, Pa \qquad 1 atm = 760 \, Tr$ (Tor – milimetr słupa rtęci)

Płyny w spoczynku



Warunek równowagi sił działających na objętość wody

$$F_2 = F_1 + mg \qquad F_1 = p_1 S$$

$$F_2 = p_2 S$$

$$p_2 S = p_1 S + \rho S g (y_1 - y_2) \qquad m = \rho S (y_1 - y_2)$$

$$p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2)$$

ρ – gęstość wody

Oznaczmy przez p_0 ciśnienie atmosferycze:

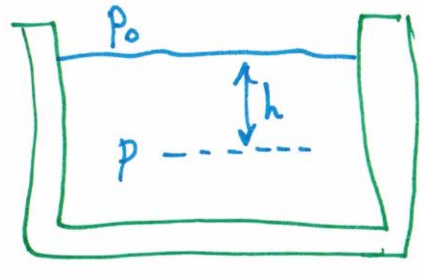
$$p_1 = p_0 \quad \text{przy} \quad y_1 = 0$$

poziom 2 na głębokości h pod powierzchnią wody:

$$p_2 = p \quad \text{przy} \quad y_2 = -h$$

– p jest ciśnienie na głębokości h

$$\Longrightarrow \quad \boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

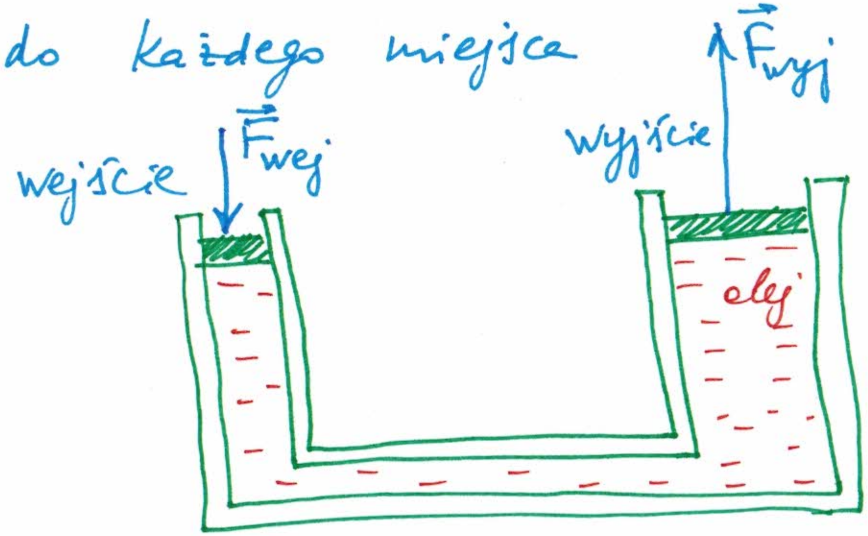


Ciśnienie atmosferyczne na wysokości d nad poziomem wody

$$p = p_0 - \rho_{pow} g d$$

Prawo Pascala

W zamkniętej objętości nieściśliwego płynu zmiana ciśnienia jest przenoszona bez zmiany wartości do każdego miejsca w płynie i do ścian zbiornika



prasa hydrauliczna

Zmiana ciśnienia:

$$\Delta p = \frac{F_{wej}}{S_{wej}} = \frac{F_{wyj}}{S_{wyj}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{wyj} = F_{wej}\,\frac{S_{wyj}}{S_{wej}}}$$

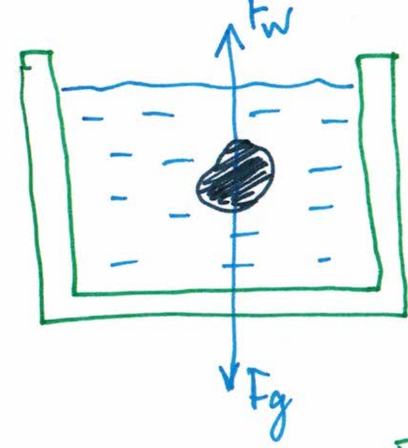
Wykonana praca przy przemieszczeniu tłoka d_{wej} (d_{wyj})

$$W = F_{wyj}\, d_{wyj} = F_{wej}\,\frac{S_{wyj}}{S_{wej}}\cdot d_{wej}\,\frac{S_{wej}}{S_{wyj}} = F_{wej}\, d_{wej}$$

$S_{wej}\, d_{wej} = S_{wyj}\, d_{wyj}$

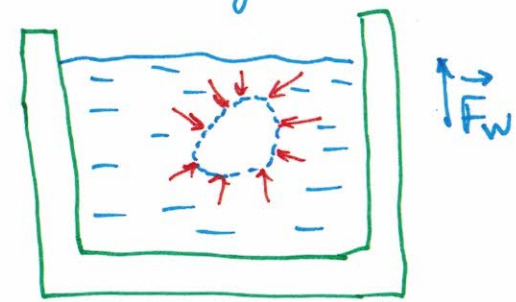
Prasa hydrauliczna umożliwia działanie mniejszą siłą na dłuższej drodze zamiast działania większą siłą na krótszej drodze.

Prawo Archimedesa



Na ciało całkowicie lub częściowo zanurzone w płynie działa ze strony płynu siła wyporu $\vec{F}_w$. Jest ona skierowana pionowo do góry, a jej wartość jest równa ciężarowi $m_p g$ płynu wypartego przez to ciało:

$$\boxed{F_w = m_p g}$$

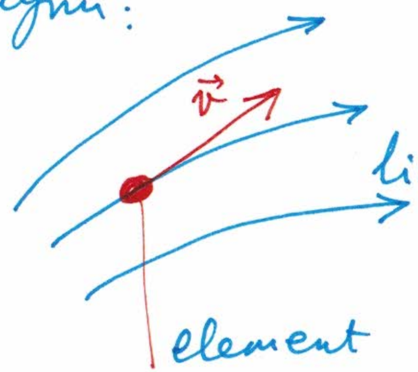


Ruch płynów doskonałych

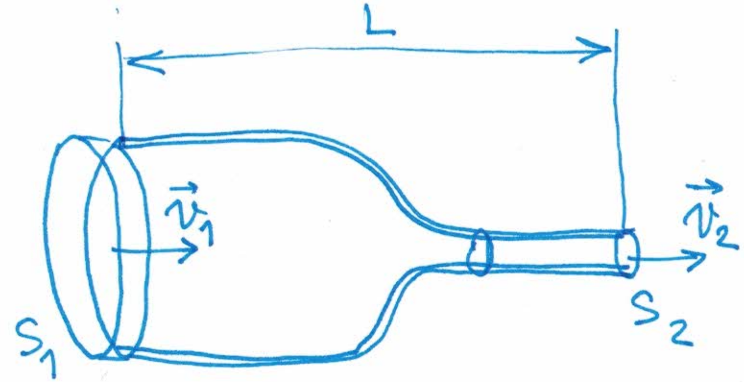
Płyn nazywamy doskonałym, kiedy są spełnione założenia:

1) Przepływ <u>ustalony</u> – prędkość w każdym punkcie nie zmienia się z czasem. Ustalony przepływ nazywamy <u>laminarnym</u>. Nieustalony – <u>turbulentny</u>
2) Przepływ <u>nieściśliwy</u> (gęstość jest stała)
3) Przepływ <u>nielepki</u>. Lepkość jest miarą oporu, jaki stawia płyn jego przepływowi.
4) Przepływ <u>bezwirowy</u>.

Przepływ płynu:



linii prądu są torami cząstek płynu przy jego przepływie



Przepływ płynu przez odcinek rury

Równanie ciągłości

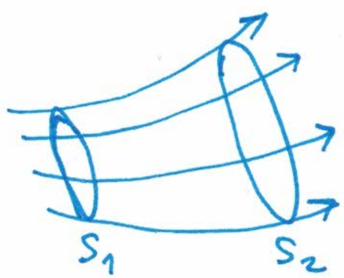
W przedziale czasu Δt przepływa płyn o objętości $\Delta V = S \Delta x = S v \Delta t$

Dla lewego i prawego końca odcinka rury

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

$\Rightarrow \quad S_1 v_1 = S_2 v_2$ – równanie ciągłości

Stosujemy do strugi prądu



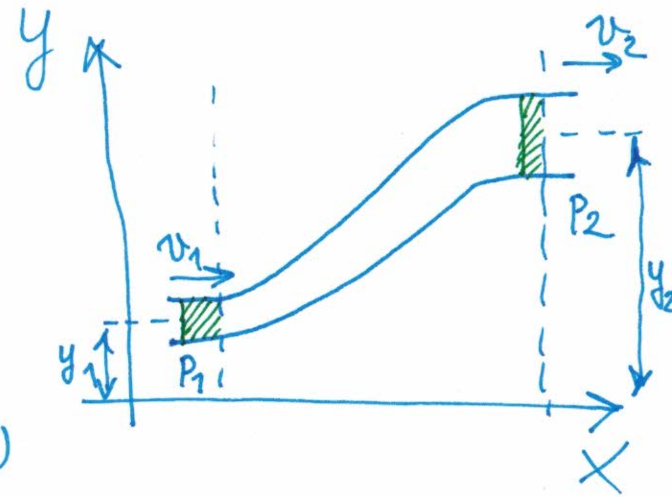
$$\boxed{R_V = S v = \text{const}}$$

$$\boxed{R_m = \rho R_V = \rho S v = \text{const}}$$

R_V – szybkość przepływu objętości płynu (strumień objętościowy)

R_m – szybkość przepływu masy (strumień masy)

Równanie Bernoulliego



Z zasady zachowania energii wynika

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g y_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g y_2$$

albo

$$\boxed{p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g y = const}$$

równanie Bernoulliego (dla płynu doskonałego)

- Przy $v_1 = v_2 = 0$ (płyn w spoczynku)

$$p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2)$$

- Przy $y_1 = y_2 = 0$ (przepływ w pionie)

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

- Jeśli przy przepływie wzdłuż poziomej linii prądu prędkość elementu płynu wzrasta, to ciśnienie płynu maleje i na odwrót

Wyprowadzenie równania Bernoulliego

Zmiana energii kinetycznej: $\Delta E_k = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \frac{\rho \Delta V}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

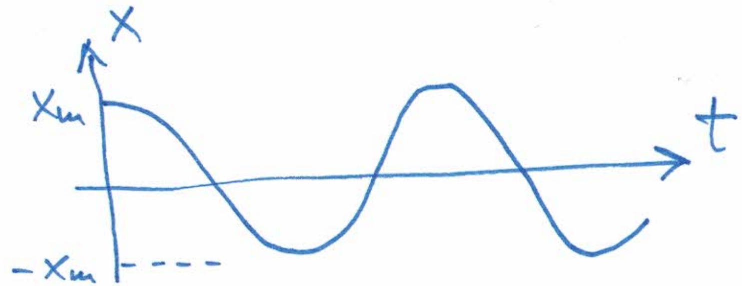
Zmiana energii potencjalnej: $\Delta E_p = \Delta m g (y_2 - y_1) = \rho \Delta V g (y_2 - y_1)$

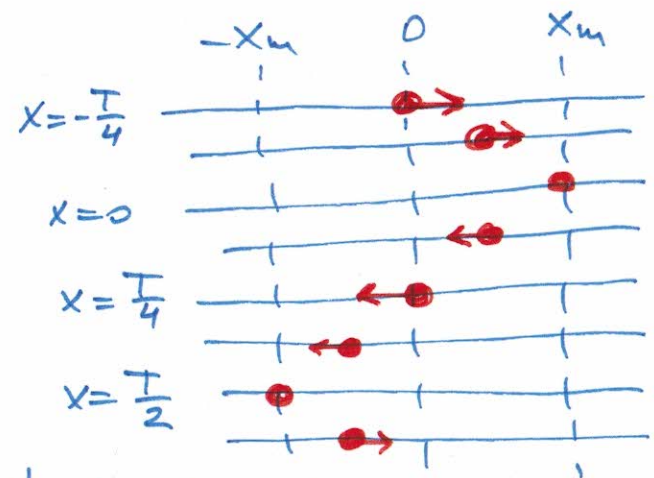
Wykonana praca: $\Delta W = p_1 S_1 \Delta x_1 - p_2 S_2 \Delta x_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$

$$\Delta W = \Delta E_k + \Delta E_p \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

Drgania

Ruch harmoniczny





Równanie ruchu harmonicznego

$$\boxed{x(t)=x_m\cos(\omega t+\phi)}$$

x_m – amplituda drgań

$(\omega t+\phi)$ – faza ruchu

ϕ – faza początkowa

ω – częstość kołowa

ν – częstość

Okres drgań T jest określony równaniem

$$x(t)=x(t+T)$$

$$\omega T=2\pi \quad\Rightarrow\quad \boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu}$$

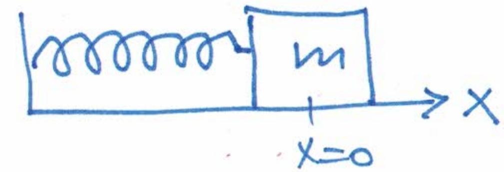
Prędkość: $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=-\omega x_m\sin(\omega t+\phi)$

Przyspieszenie: $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=-\omega^2 x_m\cos(\omega t+\phi)=-\omega^2 x(t)$

$\Rightarrow$ W ruchu harmonicznym przyspieszenie jest proporcjonalne do przemieszczenia, ale ma przeciwny znak

Siła w ruchu harmonicznym: $\underline{F=ma=-m\omega^2 x}$

Przykład : Klocek na sprzężynie



Siła działająca na klocek

$$\underset{\sim\sim\sim}{F=-kx} \quad \text{(prawo Hooke'a)}$$

k – stała sprężystości sprężyny

x – przemieszczenie klocka

$\Rightarrow \; k = m\omega^2$

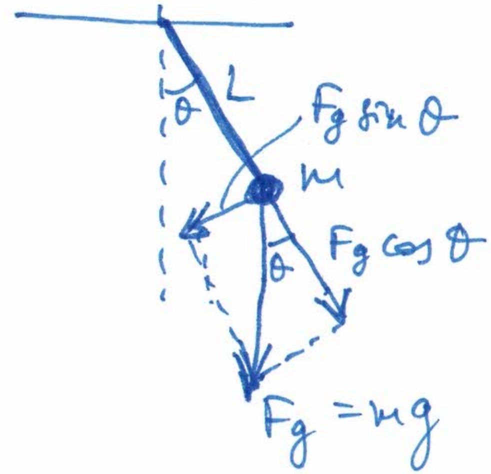
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\;, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Energia potencjalna $E_p(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}\cos^2(\omega t+\varnothing)$

Energia kinetyczna $E_k(t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\sin^2(\omega t+\varnothing) = \frac{kx_m^2}{2}\sin^2(\omega t+\varnothing)$

Całkowita energia mechaniczna $E = E_p + E_k = \frac{kx_m^2}{2}$ – stała

Przykład: wahadło matematyczne



Równanie ruchu: $M = I\alpha$

$$M = -Lmg\sin\theta \simeq -Lmg\,\theta$$

dla $\theta \ll 1$

$\Rightarrow$ moment siły jest proporcjonalny do przemieszczenia kątowego i ma przeciwny znak

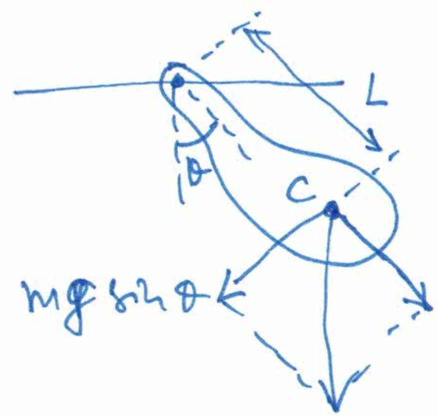
$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$I = mL^2$
moment bezwładności

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$ – okres nie zależy od masy ciała

Przykład: wahadło fizyczne

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}}$$

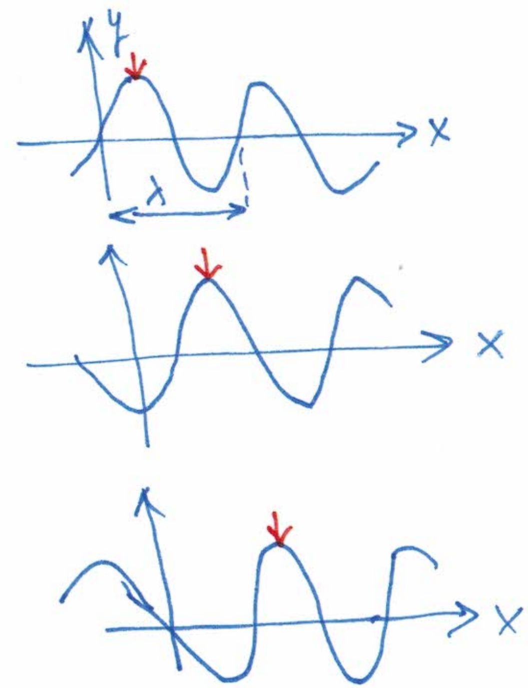


Fale

Rodzaje fal: – fale mechaniczne
– fale elektromagnetyczne
– fale materii

W fali poprzecznej przemieszczenie (wektor pola) jest poprzeczny do kierunku ruchu fali.
W fali podłużnej przemieszczenie – wzdłuż kierunku ruchu fali (dźwięk)

Równanie fali: $\boxed{y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)}$

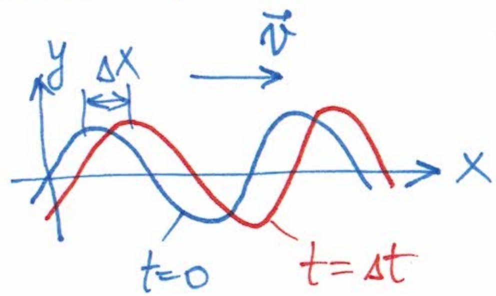


y_m – amplituda fali
$(kx - \omega t)$ – faza fali
λ – długość fali
k – liczba falowa

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Prędkość fali biegnącej



Stałość fazy: $kx - \omega t = \text{const}$

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}}$$

Zasada superpozycji fal

$$y_c(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$ – nakładające się fale dodają się algebraicznie, tworząc falę wypadkową

$\Rightarrow$ Nakładające się fale w żaden sposób nie wpływają na siebie wzajemnie

Interferencja fal

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$y_c(x,t) = y_m\left[\sin(kx-\omega) + \sin(kx - \omega t + \phi)\right] = 2y_m \cos\frac{\phi}{2}\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

If $\phi = 2n\pi$ – interferencja konstruktywna

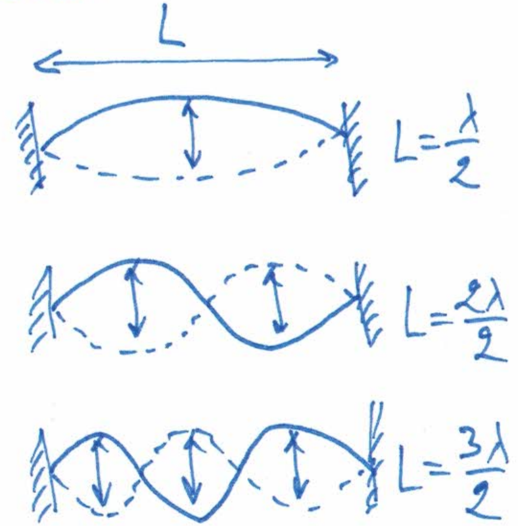
If $\phi = (2n+1)\pi$ – interferencja destruktywna

$n = 1, 2, 3, \ldots$ liczba całkowita

Fale stojące

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y_c(x,t) = 2y_m \sin kx \cos\omega t$$



Fala stojąca o długości L może być utworzona przez fale z $\boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$