2. Mechanika Lagrange'a

Rzeszów University of Technology

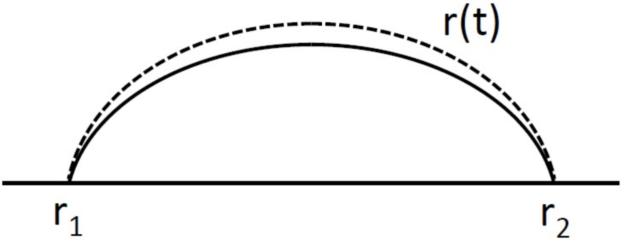
19 października 2023

Wstęp

Równanie ruchu w mechanice klasycznej (II zasada dynamiki Newtona)

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

gdzie $\vec{r}(t)$ - tor ruchu cząstki, $U(\vec{r})$ - energia potencjalna cząstki w zewnętrznym polu, $\ddot{\vec{r}} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$



Ciągła linia - funkcja $\vec{r}(t)$, która jest rozwiązaniem równania ruchu

- Ruch cząstki opisujemy przez zależność położenia cząstki od czasu $\vec{r}(t)$
- Stan cząstki w każdy moment czasu jest określony przez położenie $\vec{r}$ i prędkość $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ (kropka oznacza pochodną względem czasu)

Jak znaleźć równanie ruchu w teorii Lagrange'a?

Weźmiemy dowolną funkcję $\vec{r}(t)$, dla której $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ i $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$ i obliczymy **działanie** S

$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \tag{1}$$

gdzie L - funkcja Lagrange'a (lagrangian).

Lagrangian cząstki w mechanice klasycznej wybieramy w postaci

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - U(\vec{r}) \tag{2}$$

Pierwszy człon mieści zależność od prędkości $\vec{v}$ dla małych $\vec{v}$ (w mechanice nierelatywistycznej funkcja skalarna od wektora przy małych $\vec{v}$ może być tylko $\vec{v}^2$).

Drugi człon mieści zależność od $\vec{r}$ przez wyrażenie dla energii potencjalnej $U(\vec{r})$.

Zasada najmniejszego działania

Działanie $S[\vec{r}(t)]$ zależy od wyboru funkcji $\vec{r}(t)$, tzn. $S[\vec{r}(t)]$ jest *funkcjonałem* od $\vec{r}(t)$ (funkcjonał - funkcja, w której argumentem jest funkcja $\vec{r}(t)$ - czyli "funkcja od funkcji").

Zasada najmniejszego działania: **funkcja $\vec{r}(t)$, dla której działanie $S[\vec{r}(t)]$ stanowi minimum, jest klasycznym torem ruchu cząstki**:

$$\delta S[\vec{r}(t)] \equiv S[\vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t)] - S[\vec{r}(t)] = 0, \tag{3}$$

gdzie $\delta\vec{r}(t)$ jest dowolnym małym wychyleniem od funkcji $\vec{r}(t)$ spełniającym warunek $\delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = 0$.

Podstawiamy (2) w równanie (3)

$$\begin{aligned} \delta S[\vec{r}(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})\right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\,\delta\vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\,\delta\dot{\vec{r}}\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\,\delta\vec{r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\,\delta\vec{r}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\delta\vec{r}\right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\right]\delta\vec{r} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(całkowaliśmy przez części). W wyniku dostajemy równanie ruchu w postaci ogólnej

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0 \tag{5}$$

Równanie ruchu w mechanice klasycznej

Po podstawieniu (2) w (5) znajdziemy równanie ruchu cząstki w mechanice klasycznej

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \tag{6}$$

Symetria i zasady zachowania

- translacja w czasie $t \rightarrow t + \delta t$ (jednorodność czasu) powoduje zachowanie energii

$$E = \vec{v}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}) \tag{7}$$

- translacja w przestrzeni $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}$ (jednorodność przestrzeni) powoduje zachowanie pędu

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} \tag{8}$$

- symetria obrotowa $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}$ (izotropowość przestrzeni) powoduje zachowanie momentu pędu

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{9}$$

- Jednorodność czasu oznacza, że $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Zupełna pochodna lagrangianu

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} v_i + \frac{\partial L}{\partial v_i} \dot{v}_i \right) = \sum_i \left(v_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{\partial L}{\partial v_i} \dot{v}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} v_i \right), \tag{10}$$

gdzie wykorzystaliśmy równanie ruchu $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0$.

- Możemy przedstawić równanie (10) w postaci **równania zachowania**

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{11}$$

gdzie oznaczyliśmy wielkosć, która jest zachowana na skutek jednorodności czasu

$$E = \sum_i v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L \qquad - \ \underline{\text{energia cząstki}} \tag{12}$$

- Podstawiamy w (12) $L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r})$ i dostajemy

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}) \tag{13}$$

Pęd cząstki

- Jednorodność przestrzeni:
$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0.$$
- Z tego równania na podstawie równania ruchu $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0$ dostajemy zasadę zachowania
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{14}$$
gdzie oznaczyliśmy
$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \qquad - \ \underline{\text{pęd cząstki}} \tag{15}$$
- Podstawiamy w (15) $L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r})$ i dostajemy
$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{16}$$

Moment pędu cząstki

- Przy obrocie na kąt $\delta\vec{\alpha}$ wektor wodzący $\vec{r}$ zmienia się,

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r} + \delta\vec{\alpha} \times \vec{r},$$

a wektor prędkości

$$\vec{v} \longrightarrow \vec{v} + \delta\vec{\alpha} \times \vec{v}.$$

- Izotropowość przestrzeni oznacza niezmienniczość lagrangianu przy obrocie na dowolny kąt $\delta\vec{\alpha}$

$$\begin{aligned} \delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot (\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot (\delta\vec{\alpha} \times \vec{v}) = \dot{\vec{p}} \cdot (\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) + \vec{p} \cdot (\delta\vec{\alpha} \times \vec{v}) \\ = \delta\vec{\alpha} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \vec{v} \times \vec{p}) = \delta\vec{\alpha} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

- Wobec dowolności $\delta\vec{\alpha}$ z równania (17) dostajemy zasadę zachowania momentu pędu

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0 \tag{18}$$

gdzie

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad - \ \underline{\text{moment pędu cząstki}} \tag{19}$$

Funkcja Hamiltona i równania kanoniczne

- Funkcja Lagrange'a L zależy od położenia $\vec{r}$ i prędkości $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ cząstki, $L(\vec{r}, \vec{v})$. Natomiast pęd w teorii Lagrange'a: $\vec{p} = \partial L / \partial \vec{v}$.
- Zmiana współrzędnych $(\vec{r}, \vec{v})$ na $(\vec{r}, \vec{p})$ oznacza przejście od funkcji Lagrange'a $L(\vec{r}, \vec{v})$ do funkcji Hamiltona $H(\vec{r}, \vec{p})$, która także opisuje mechanikę cząstki
- Przedstawiamy różniczkę zupełną funkcji Lagrange'a w taki sposób

$$dL(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = \dot{\vec{p}} \cdot d\vec{r} + \vec{p} \cdot d\vec{v} = \dot{\vec{p}} \cdot d\vec{r} + d(\vec{p} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot d\vec{p} \tag{20}$$

albo

$$dH(\vec{r}, \vec{p}) = -\dot{\vec{p}} \cdot d\vec{r} + \vec{v} \cdot d\vec{p} \tag{21}$$

gdzie wprowadziliśmy funkcję Hamiltona mechaniki klasycznej

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L \tag{22}$$

- Ze wzoru (21) znajdziemy

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}, \qquad \vec{v} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \tag{23}$$

Równania (23) nazywamy równaniami Hamiltona (albo *równaniami kanonicznymi*).

- Po podstawieniu lagrangianu $L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r})$ dostajemy

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) \tag{24}$$