3. Hydrodynamika

Rzeszów University of Technology

29 listopada 2023

Zmienne makroskopowe, opisujący ciecz (albo gaz) – gęstość, prędkość, ciśnienie $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$. Zmiana masy cieczy w objętości V_0 w jednostkę czasu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV \tag{1}$$

Ilość cieczy wychodzącej z objętości V_0 przez jej powierzchnię w jednostkę czasu

$$\oint_{S_0} \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{2}$$

gdzie $\vec{v}$ – prędkość makroskopowa.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV = -\oint_{S_0} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{3}$$

Twierdzenie Gaussa

$$\oint_{S_0} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{V_0} \mathrm{div}(\rho \vec{v}) \, dV \tag{4}$$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\int_{V_0} \mathrm{div}(\rho \vec{v}) \, dV \tag{5}$$

Równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0 \tag{6}$$

albo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \tag{7}$$

gdzie $\vec{j} = \rho\vec{v}$ – gęstość strumienia cieczy.

$$\mathrm{div}(\rho \mathrm{v}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,\rho v_\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}\,v_\alpha + \rho\,\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \tag{9}$$

Matematyka: różniczkowanie wektorowe

Operator nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{10}$$

Operator Laplace'a

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla_i \nabla_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{11}$$

$$\operatorname{grad} a = \nabla a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}\right) \tag{12}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{13}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) \tag{14}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \tag{15}$$

Twierdzenie Gaussa

$$\oint_{S_0} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{V_0} \operatorname{div} \vec{A}\, dV \qquad dS_i \longrightarrow dV \nabla_i \tag{16}$$

Równanie Eulera

Siła, działająca na objętość V_0 cieczy

$$\vec{F} = -\oint_{S_0} p\, d\vec{S} = -\int_{V_0} (\text{grad}\, p)\, dV \tag{19}$$

Równanie ruchu

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho\vec{v}\, dV = -\int_{V_0} (\text{grad}\, p)\, dV \tag{20}$$

$$\rho\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, p \tag{21}$$

Dla cieczy prędkość $\vec{v}(\vec{r}, t)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} \tag{22}$$

Równanie Eulera

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\, p \tag{23}$$

Strumień pędu

Pęd jednostki objętości jest $\rho\vec{v}$. Prędkość jego zmiany

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho\vec{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\vec{v} + \rho\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \tag{24}$$

Z równania ciągłości

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) \tag{25}$$

Z równania Eulera

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho\vec{v} = -\vec{v}\,\mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) - \rho\,(\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} - \mathrm{grad}\,p \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho v_i = -v_i\,\nabla_j(\rho v_j) - \rho v_j \nabla_j v_i - \nabla_i p \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\nabla_j(\rho v_i v_j) - \nabla_i p \tag{29}$$

Dostajemy równanie zachowania pędu

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\nabla_j \Pi_{ij} \tag{30}$$

gdzie Π_{ij} – tensor gęstości strumienia pędu

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij} p + \rho v_i v_j \tag{31}$$

oraz δ_{ij} - tensor jednostkowy, tzn. $\delta_{ij} = 1$ przy $i = j$ i $\delta_{ij} = 0$ przy $i \neq j$.

Dla cieczy lepkiej równanie ruchu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho v_i = -\nabla_j \Pi_{ij} \tag{32}$$

gdzie tensor gęstości strumienia pędu uwzględnia tarcie wewnętrzne (czyli lepkość cieczy)

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij} p + \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \rho v_i v_j \tag{33}$$

gdzie σ_{ij} – tensor naprężeń i σ'_{ij} – lepki tensor naprężeń

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \tag{34}$$

Najogólniejsza postać tensora 2-go rzędu spełniającego wszystkie warunki jest

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\nabla_k v_k\right) + \xi\delta_{ij}\,\nabla_k v_k \tag{35}$$

gdzie η i ξ – współczynniki lepkości, które są dodatnie, $\eta > 0$, $\xi > 0$. Współczynnik ξ jest często nazywany drugą lepkością.

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \nabla_j v_i\right) = -\nabla_i p + \nabla_j\left[\eta\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\nabla_k v_k\right)\right] + \nabla_i\left(\xi \nabla_k v_k\right) \tag{36}$$

Przy stałych η i ξ otrzymujemy **równania Naviera-Stokesa**

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}\right) = -\mathrm{grad}\,p + \eta\,\Delta\vec{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v} \tag{37}$$

Dla nieściśliwej cieczy div $\vec{v} = 0$, i równanie Naviera-Stokesa przyjmuje postać

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\vec{v} \tag{38}$$

gdzie $\nu = \eta/\rho$ – współczynnik lepkości kinematycznej (natomiast η – współczynnik lepkości dynamicznej).

Tensor naprężeń w cieczy nieściśliwej przybiera postać

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) \tag{39}$$

W nieściśliwej cieczy lepkość opisuje się tylko jednym współczynnikiem lepkości η.