5. Pole grawitacyjne

Rzeszów University of Technology

6 grudnia 2023

Ruch cząstki nierelatywistycznej w potencjale grawitacyjnym

- Przedstawimy działanie, które składa się z działania swobodnej cząstki masy m i oddziaływania z polem grawitacyjnym, przedstawionym potencjałem $\phi(\vec{r})$

$$S(C) = -mc \int_C ds - \int_C m\phi \, dt = -mc^2 \int_C \left(\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{\phi}{c^2} \right) dt, \tag{1}$$

gdzie całkowanie wzdłuż linii świata cząstki pomiędzy punktami czasoprzestrzeni $(ct_1, \vec{r}_1)$ a $(ct_2, \vec{r}_2)$, $\phi(\vec{r})$ - skalarny potencjał pola grawitacyjnego (3D skalar).

- Odpowiednio do definicji $S(C) = \int_C L \, dt$ znajdziemy z (1) lagrangian cząstki w potencjale grawitacyjnym

$$L = -mc^2 \left(\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{\phi}{c^2} \right) \tag{2}$$

- Równanie ruchu $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ przyjmuje postać

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m\nabla\phi \tag{3}$$

gdzie $\vec{p} = \partial L / \partial \vec{v} = m\vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ - pęd cząstki w mechanice relatywistycznej.

- Podstawiając $\vec{p}$ do (3) znajdziemy równanie ruchu, które **nie zależy od masy cząstki**

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\nabla\phi \tag{4}$$

- Przy $v \ll c$ dostajemy z (4) równanie ruchu: $d\vec{v}/dt = -\nabla\phi$. Jest to równanie **mechaniki nierelatywistycznej**

- Przedstawienie pola grawitacyjnego przez potencjał $\phi(\vec{r})$ **nie jest zgodne z mechaniką relatywistyczną** ponieważ funkcja $\phi(\vec{r})$ nie jest wyznaczona jako skalar w 4-wymiarowej czasoprzestrzeni

- Istnieje możliwość przedstawienia pola grawitacyjnego przez "zakrzywienie metryki czasoprzestrzeni" - jeśli tensor metryczny g_{ij} zależy od punktu świata, tzn. istnieje zależność $g_{ij}(x_i)$
- Krzywiznę czasoprzestrzeni charakteryzuje druga pochodna funkcji $g_{ij}(x_i)$, która matematycznie może być przedstawiona przez **tensory krzywizny Riemanna i Ricciego**
- Przedstawienie grawitacji przez niejednorodny tensor metryczny $g_{ij}(x_i)$ jest zgodne z zasadą równoważności mechaniki relatywistycznej:

  Własności ruchu ciał w nieinercjalnym układzie odniesienia są takie same jak własności ruchu ciał w inercjalnym układzie w obecności pola grawitacyjnego

  Powyższe twierdzenie wiąże się z tym, że przejście do nieinercjalnego układu odniesienia można przedstawić przez pewny wybór tensora metrycznego czasoprzestrzeni
- **Grawitacja według Einsteina opisuje się jak wpływ zakrzywienia metryki czasoprzestrzeni na ruch ciała**
- **Jednocześnie, każde ciało samo wpływa na zakrzywienie metryki czasoprzestrzeni**

- Szukamy równanie ruchu ciała w zakrzywionej czasoprzestrzeni z zasady najmniejszego działania względem wariacji trajektorii cząstki (linii świata), $x^i \to x^i + \delta x^i$
- Działanie cząstki $S(C) = -mc \int_C ds$ powinno być napisano dla 4-przestrzeni z pewnym niejednorodnym 4-tensorem metrycznym $g_{ij}(x^i)$.
- Interwał ds przedstawiamy jak $ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$. Znajdziemy wariację działania

$$\delta S(C) = -\frac{mc}{2}\int_C \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k u^i u^j ds + g_{ij}u^i\,\delta dx^j + g_{ij}u^j\,\delta dx^i\right)$$

$$= -\frac{mc}{2}\int_C \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k u^i u^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^k u^i \delta x^j - g_{ij}\frac{du^i}{ds}\delta x^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^k u^j \delta x^i - g_{ij}\frac{du^j}{ds}\delta x^i\right) ds$$

$$= mc\int_C \left[g_{ij}\frac{du^j}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right)u^j u^k\right]\delta x^i ds \tag{5}$$

gdzie $u_j = \frac{dx_j}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$ - 4-wektor prędkości. Korzystając z zasady najmniejszego działania $\delta S = 0$ znajdziemy z (5) równanie ruchu cząstki w polu grawitacyjnym

$$\frac{du^l}{ds} + \Gamma^l_{jk}u^j u^k = 0 \tag{6}$$

gdzie Γ^l_{jk} - **współczynnik koneksji** (symbol Christoffela), który zawiera informacje o zakrzywieniu 4-przestrzeni

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right) \tag{7}$$

- Zmiana dowolnego 4-wektora A_i przy przesunięciu równoległym wzdłuż małego konturu zamkniętego w krzywej przestrzeni

$$\Delta A_i = \oint \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\, dx^j = \oint \Gamma^k_{ij} A_k dx^j \tag{8}$$

gdzie było wykorzystano, że $\partial A_i / \partial x^l = \Gamma^k_{ij} A_k$ - zmiana wektora jest związana z tym, że tensor metryczny g_{ij} zależy od punktu przestrzeni.

- Po przekształceniu całki wzdłuż konturu (8) za dopomogą twierdzenia Stokesa (przekształcenie całki po linii krzywej tworzącej kontur w 4-przestrzeni w całkę po rozpiętej na tym konturze powierzchni dwuwymiarowej, $dx_i \to df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}$) otrzymamy

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} R^l_{\ ijk} A_l\, \Delta f^{jk} \tag{9}$$

gdzie Δf^{jk} jest 4-tensorem powierzchni konturu, natomiast

$$R^l_{\ ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{mj} \Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{mk} \Gamma^m_{ij} \tag{10}$$

- tensor Riemanna (tensor krzywizny).

- Wprowadzimy także zwężony tensor krzywizny $R_{ik} = R^l_{\ ilk}$ - tensor Ricciego oraz skalarną krzywiznę $R = g^{ik} R_{ik}$.

- Działanie pola grawitacyjnego (skalar, związany z krzywizną przestrzeni)

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int R\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{11}$$

gdzie k - stała grawitacyjną, i całkowanie po 4-przestrzeni, $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$.

- g jest wyznacznikiem tensora metrycznego g_{ij}. Wprowadzenie mnożnika $\sqrt{-g}$ jest niezbędne ponieważ wielkość $\sqrt{-g}\,d\Omega$ jest niezmiennicza przy przekształceniu współrzędnych $x^i \to x'^i$ (znak minus w $\sqrt{-g}$ ponieważ $g < 0$).
- Obliczenie wariacji działania pola grawitacyjnego

$$\delta S_g(g_{ij}) = -\frac{c^3}{16\pi k}\,\delta\int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{12}$$

Przy tym obliczeniu było wykorzystano, że na mocy twierdzenia Gaussa całkę $\int \frac{\partial(\sqrt{-g}w^l)}{\partial x^l}\,d\Omega$, gdzie $w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}$, można przekształcić w całkę po hiperpowierzchni przestrzeni, gdzie pole grawitacyjne znika.

Działanie dla materii

- Dla dowolnego układu materii (na przykład, cząstek w przestrzeni) działanie można przedstawić
$$S_m = \frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{13}$$
gdzie Λ - gęstość funkcji Lagrange'a.
- Wariacja działania przedstawiamy w postaci
$$\delta S_m(g_{ij}) = -\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{14}$$
gdzie T_{ik} - tensor energii - pędu
$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial g_{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\right) \tag{15}$$
- Dla ciał makroskopowych tensor energii-pędu zawiera energię ε i ciśnienie p elementu objętości ciała. W układzie odniesienia, w którym ciało jest w spoczynku, tensor T_{ik} diagonalny, $T_{ik} = \mathrm{diag}\,(\varepsilon, p, p, p)$.
- Przy przejściu do dowolnego układu odniesienia dostajemy tensor energii-pędu ciała makroskopowego w postaci
$$T_{ik} = (p+\varepsilon)u_i u_k - pg_{ik} \tag{16}$$

- Przedstawimy działanie, które składa się z działania pola grawitacyjnego i materii $S = S_g + S_m$ i obliczymy **wariacje względem tensora metrycznego** g_{ij}.

  Innymi słowy, szukamy "równanie ruchu" dla geometrii czasoprzestrzeni

- Korzystając z (12) i (15) znajdziemy

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{17}$$

- Na podstawie zasady najmniejszego działania $\delta S = 0$ znajdziemy równania Einsteina dla pola grawitacyjnego

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \tag{18}$$

  Są to podstawowe równania ogólnej teorii względności.

- Równanie Einsteina w próżni ($T_{ik} = 0$):

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0 \tag{19}$$

- Wprowadzimy tensor h_{ik} który opisuje słabe zaburzenie metryki galileuszowskiej (płaskiej), tzn. $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$.
- Przy założeniu, że h_{ik} jest słabym zaburzeniem można obliczyć symbole Christoffela Γ^{i}_{kl}, tensor Riemanna R_{iklm}, tensor Ricciego R_{ik} i krzywiznę R.
- Po podstawieniu R_{ik} i R do (19) równanie pola grawitacyjnego w próżni przyjmuje postać

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0 \tag{20}$$

gdzie Δ - operator Laplace'a w 3D. To są równania falowe dla metryki czasoprzestrzeni.

Fale grawitacyjne, podobnie jak i elektromagnetyczne, rozprzestrzeniają się w próżni z prędkością światła.

- Załóżmy, że pole grawitacyjne ma symetrię centralną. W tym przypadku interwał przedstawiamy we współrzędnych sferycznych (ct, r, θ, φ)

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{21}$$

gdzie $\nu(r,t)$ i $\lambda(r,t)$ - pewne funkcji odległości od środka pola r i czasu t. Odpowiednio, różne od zera składowe tensora metrycznego

$$g_{00} = e^{\nu},\ g_{11} = -e^{\lambda},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2 \sin^2\theta$$

- Równania Einsteina w próżni z taką metryką można rozwiązać ścisłe. W tym celu trzeba obliczyć składowe tensora Γ^i_{kl} oraz tensora Ricciego R_{ik}, i podstawić w równania Einsteina w próżni (19). W wyniku otrzymujemy

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{22}$$

gdzie $r_g = 2mk/c^2$ - promień grawitacyjny.

Przy scałkowaniu równań Einsteina była wybrana stała całkowania w taki sposób, że dla dużych odległości metryka jest newtonowska.

- Podstawiamy (22) w (21) i dostajemy metrykę Schwarzschilda - metrykę czasoprzestrzeni o symetrii centralnej

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) \tag{23}$$

Zapadanie grawitacyjne i czarne dziury

- Metryka Schwarzschilda (23) daje opis pola grawitacyjnego przy $r > r_g$. Przy tym nie ma możliwości ciągłego przejścia od $r > r_g$ do $r < r_g$ ponieważ w tych zmiennych w punkcie $r = r_g$ tensor metryczny jest rozbieżny.
- Osobliwość metryki można usunąć stosując metrykę niestacjonarną

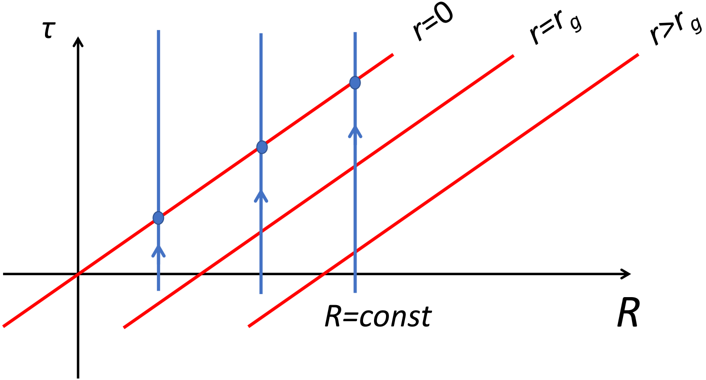
$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3(R-c\tau)}{2r_g}\right]^{2/3}} - \left[\frac{3r_g^{1/2}(R-c\tau)}{2}\right]^{4/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (24)$$

gdzie wprowadziliśmy zamiast (ct, r) nowe współrzędne czasowe i przestrzenne $(c\tau, R)$

$$c\tau = ct + \int \frac{(r_g/r)^{1/2} dr}{1 - r_g/r}, \quad R = ct + \int \frac{dr}{(1 - r_g/r)(r_g/r)^{1/2}} \qquad (25)$$

Zmiana współrzędnych oznacza **przejście do innego układu odniesienia**.

- Linii świata cząstek spoczywających w układzie współrzędnych z $r = const$ znajdziemy z równania $R - c\tau = \frac{2r^{3/2}}{3r_g^{1/2}} = const$ - są to linii proste, które opisują poruszające się cząstki.
- W niestacjonarnej metryce (24) przy $r < r_g$ żadne cząstki nie mogą być nieruchome. Wszystkie sygnały rozchodzące w kierunku centrum, osiągają je po skończonym odstępie czasu własnego τ.
- Powierzchnia Schwarzschilda $r = r_g$ nazywa się horyzontem zdarzeń. Ciało o promieniu $r < r_g$ kurczy się czyli powinno się grawitacyjnie zapadać.
- Ponieważ zapadają się ciało nie wysyła sygnałów na zewnątrz, nazywa się takie ciało czarną dziurą.


τ
r=0
r=r g
r>r g
R=const
R

- Działanie pola grawitacyjnego może być uzupełnione przez włączenie dodatkowego człona

$$\Delta S_g = -\frac{c^3\lambda}{8\pi k} \int \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{26}$$

gdzie λ - stała kosmologiczna. Przy tym równanie Einsteina otrzymują poprawkę

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\, T_{ik} + \lambda g_{ik} \tag{27}$$

- W dużych obszarach czasoprzestrzeni stała kosmologiczna λ istotnie wpływa na rozwiązanie równań, które opisują świat jako całość
- Wprowadzenie do funkcji Lagrange'a stałej oznacza, że my przypisujemy czasoprzestrzeni pewną krzywiznę, która nie jest związana z materią
- Przy $\lambda > 0$ my mamy przestrzeń o stałej dodatniej krzywiźnie (na przykład, maksymalnie symetryczna przestrzeń de Sittera), przy $\lambda < 0$ - przestrzeń o ujemnej krzywiźnie (na przykład, maksymalnie symetryczna przestrzeń anti-de Sittera - ADS). Przy $\lambda = 0$ przestrzeń jest "płaska".

- Dla niestacjonarnej metryki promień krzywizny zależy od czasu. Przy tym odległości przestrzenne między wszystkimi punktami świata zmieniają się z czasem.
- Dane astronomiczne potwierdzili, że odległości przestrzenne liniowo wzrastają z czasem, o czym mówi prawo Hubble'a: $v = H_0 r$, gdzie v - prędkość ucieczki dalekiej galaktyki, r - odległość do niej, H_0 - stała Hubble'a
- "Ucieczka" galaktyk oznacza rozszerzający się Wszechświat. Przy tym obserwujemy przesunięcie wszystkich linii widma światła ku czerwieni - na mocy zjawiska Dopplera dla fal elektromagnetycznych
- Dlatego teraz dominuje teoria wielkiego wybuchu (Big Bang): około 14 mld. lat temu wyłonił Wszechświat - narodziła się materia i czasoprzestrzeń
- W momencie wybuchu Wszechświat był bardzo gorący, potem temperatura powoli spadała, i teraz my możemy obserwować wypromieniowanie długości fali 1,1 mm, które odpowiada temperaturze Wszechświata około 3 K.

Efekty kwantowe

- Metryka, która jest rozwiązaniem równania Einsteina, jest wynikiem teorii *klasycznej* (mechaniki Lagrange'a) i nie uwzględnia efektów kwantowych
- Fluktuacje kwantowe dają możliwość obserwacji pewnego wypromieniowania wychodzącego z czarnej dziury (S. Hawking)

Niewyjaśnione pytania

- Jaka jet wartość stałej kosmologicznej λ?
- Czy rozszerzenie Wszechświata będzie trwało bez końca? Może po rozszerzeniu nastąpi ściśnienie? Albo oscylacje?
- Czy istnieje "ciemna materia", która jest odpowiedzialna za krzywiznę czasoprzestrzeni?
- Jaka jest topologia czasoprzestrzeni? Czy istnieją tuneli czasoprzestrzeni (wormholes)?
- Jaka jest wymiarnosć naszej przestrzeni D?

Literatura

- S. Weinberg. Pierwsze 3 minuty.
- S. Hawking. Krótka historia czasu.
- S. Hawking, R. Penrose. The nature of space and time.
- M. Kaku. Parallel worlds.
- M. Kaku. Hyperspace.