Energia kinetyczna cząstki

$$E_k = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

$$\boxed{E_k = mc^2(\gamma - 1)}$$

Pęd a energia kinetyczna

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$$p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$$

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$$

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$$

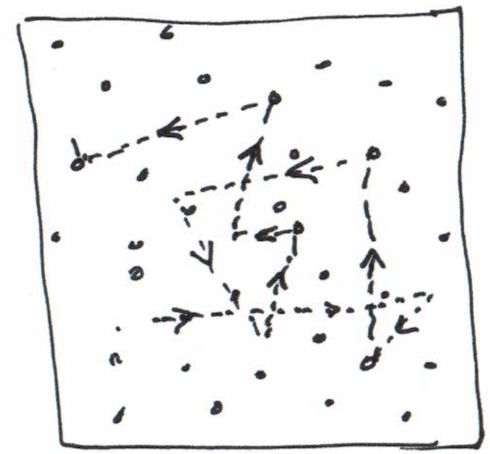
W mechanice nierelatywistycznej: $E_k = \frac{p^2}{2m}$

$$p = mv$$

Ruchy Browna i dyfuzja

Ruchy Browna – chaotyczne ruchy makroskopowych cząstek w gazach i cieczach są jednym z dowodów istnienia atomów

Dyfuzja – przemieszczanie się atomów i cząsteczek w danym ośrodku na duże odległości



Ruch cząstki w gazie

Strumień dyfuzji

$$\boxed{J = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}}$$ – prawo Ficka

D – współczynnik dyfuzji

ρ – stężenie (ilość substancji na jednostkę objętości)

Odległość na którą przemieści się cząstka przy dyfuzji za czas t:

$$r(t) = \sqrt{Dt}$$

Równanie stanu gazu rzeczywistego – równanie van der Waalsa

Równanie dla 1 mola gazu: $(n=1)$

$$\boxed{\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)\left(V_m-b\right)=RT}$$ – równanie van der Waalsa

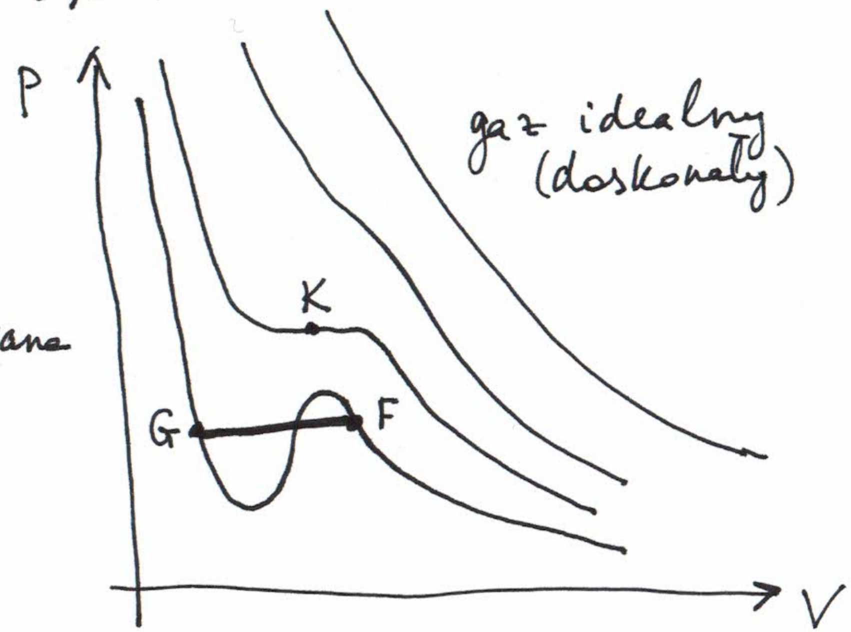
$V_m = V/n$ – objętość molowa

a – charakterystyczna stała, uwzględniająca oddziaływanie między cząsteczkami

b – charakteryzuje rozmiar cząsteczek

K – punkt krytyczny $(dp/dV=0)$

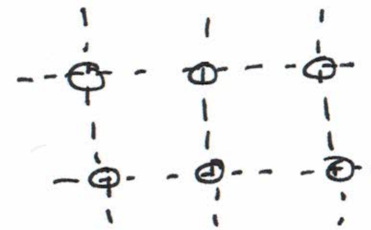
W punktach F i G – przemiana fazowa ciecz–para (skraplianie gazu)



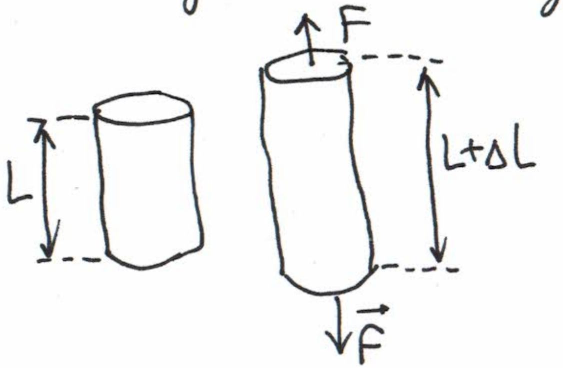
Izotermy gazu rzeczywistego

Sprężystość

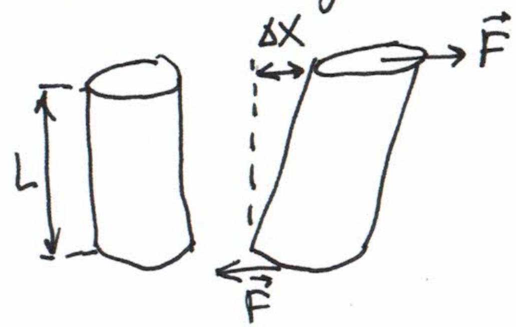
Gdy duża liczba atomów znajduje się blisko siebie tworząc ciało stałe, atomy zajmują położenia równowagi



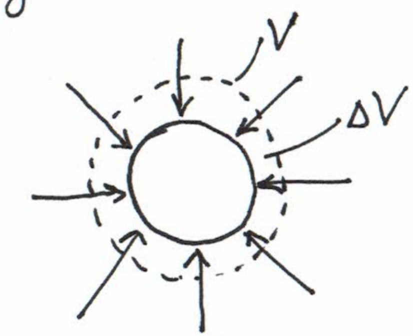
Między atomami występują siły międzyatomowe.



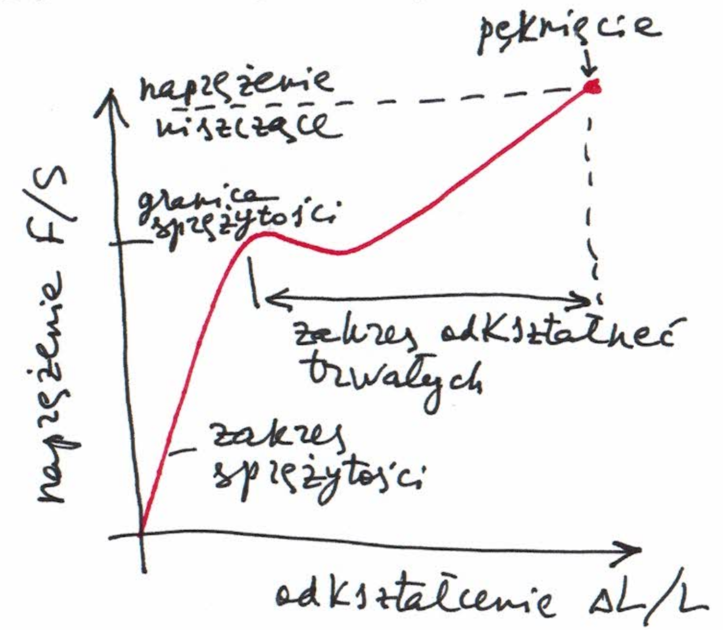
naprężenie rozciągające



naprężenie ścinające



naprężenie objętościowe (hydrostatyczne)



naprężenie = (moduł sprężystości)·(odkształcenie)

Po przekroczeniu przez naprężenie pewnej wartości noszącej nazwę granicy sprężystości materiału, próbka ulega odkształceniu trwałemu (plastycznemu).

Moduł sprężystości, związany z odkształceniem przy rozciąganiu lub ściskaniu — moduł Younga E:

$$\boxed{\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta L}{L}}$$

Materiał	Gęstość ρ	Moduł Younga E ($10^9\,N/m^2$)	Naprężenie niszczące ($10^6\,N/m^2$)	Granica sprężystości ($10^6\,N/m^2$)
Stal	7860	200	400	250
Aluminium	2710	70	110	95
Drzewno	525	13	50	–
Kość	1900	9	170	–
Polistyren	1050	3	48	–

Naprężenie ścinające

$$\boxed{\frac{F}{S} = G\frac{\Delta X}{L}}$$

G – moduł ścinania

Naprężenie objętościowe

$$\boxed{p = K\frac{\Delta V}{V}}$$

K – moduł sprężystości objętościowej czyli moduł ściśliwości

Dla wody $K = 2,2 \cdot 10^9\ N/m^2$

Dla stali $K = 16 \cdot 10^{10}\ N/m^2$

Przy ciśnieniu $p = 4 \cdot 10^7\ N/m^2$ (na głębokości 4 km) $\Delta V/V$ dla wody $\simeq 1,8\%$

dla stali $\simeq 0,025\%$

Obliczenie pochodnej II

$c' = 0 \quad (c = \text{const})$

$x' = 1$

$(u+v)' = u' + v'$

$(cu)' = cu'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$$

$y = f(\varphi(x))$

$y = f(u)$

$u = \varphi(x)$

$y'_x = y'_u \, u'_x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$(\operatorname{arc\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\operatorname{arc\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{arc\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\operatorname{arc\,cth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}$$

Obliczenie całki (całka nieoznaczona)

$$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int A f(x)\,dx = A \int f(x)\,dx \qquad (A = \text{const})$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

Jeśli $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ i $u = \varphi(x) \Rightarrow \int f(u)\,du = F(u) + C$

Przykład: $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$$

$$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$$

$$\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$$

Całkowanie przez części

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \begin{array}{l} u = u(x) \\ v = v(x) \end{array} \qquad \int u\,dv = \int [d(uv) - v\,du]$$

Przykład

$$\int x \ln x\, dx = \int \ln x\, d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$d(x^2) = 2x\,dx$

$u = \ln x$

$v = \frac{x^2}{2}$

Całka oznaczona – obliczenie przez całkę nieoznaczoną

$\int f(x)dx = F(x)$ – całka nieoznaczona (bez $C = const$)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

W obliczeniach:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Mechanika Lagrange'a

Zasada najmniejszego działania:

Niech w chwilach $t=t_1$ i $t=t_2$ układ ma określone położenia scharakteryzowane przez współrzędne $q^{(1)}$ i $q^{(2)}$.

Wtedy między tymi położeniami układ porusza się tak, że całka

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \qquad \dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość.

L - funkcja Lagrange'a układu

S - działanie układu

Niech $q(t)$ jest tą funkcją, dla której S ma minimum.

Jeżeli weźmiemy $q(t) + \delta q(t)$ zamiast $q(t)$, to S będzie wzrastało

$\delta q(t)$ - wariacja $q(t)$

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)dt - L(q, \dot{q}, t) \right] dt$$

Rozwinięcie w szereg po małej wartości δq i $\delta\dot{q}$:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

– warunek tego, że wybrana funkcja $q(t)$ daje minimum S

Drugi wyraz całkujemy przez części:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

– równanie ruchu (równanie Lagrange'a)

Dla swobodnej cząstki: $\underline{L = \frac{1}{2} m v^2}$

$q = r$
$\dot{q} = v$

Dla cząstki w potencjale $U(r)$: $\underline{L = \frac{1}{2} m v^2 - U(r)}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r}}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = F$$

Klasyczna mechanika opisuje oddziaływanie z zewnętrznym polem i oddziaływanie między ciałami przez potencjał $U(r)$.

Prawa zachowania w mechanice

1) Jednorodność czasu, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} =$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right) = 0$$

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const}$$ – energia układu

$$E = E_k(\dot{q}) + U(q) \qquad L = E_k(\dot{q}) - U(q)$$

2) Jednorodność przestrzeni, $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\varepsilon}$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} = \vec{\varepsilon}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{const}$$ – pęd układu

3) Izotropowość przestrzeni $\vec{r} \to \vec{r} + \delta\vec{r}$, $\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$, $\delta L = 0$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const}$$ – moment pędu układu