FIZYKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

Vitalii Dugaev

Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
Politechnika Rzeszowska

Semestr zimowy, rok 2017/2018

Vitalii Dugaev

- Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
- Bud. K, pokój 48
- E-mail vdugaev@prz.edu.pl
- Tel. 17-865 1917

Strona domowa (wizytówka pracownika PRz):

http://dugaev.v.prz.edu.pl/ → Lectures

Równanie ciągłości w hydrodynamice

Zmienne makroskopowe, opisujące ciecz – gęstość, prędkość, ciśnienie

$$\rho(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{v}(\mathbf{r},t), \qquad p(\mathbf{r},t)$$

Zmiana masy cieczy w objętości V_0 w jednostkę czasu

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho \, dV$$

Ilość cieczy wychodzącej z objętości V_0 przez jej powierzchnię w jednostkę czasu

$$\oint_{S_0} \rho \, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho dV = -\oint_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Wykorzystamy twierdzenie Gaussa

$$\oint_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, dV$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = - \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, dV$$

Równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

albo

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0}$$

gdzie $\boxed{\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}}$ – ***wector gęstości strumienia cieczy***

$$\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} v_\alpha + \rho\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = \mathbf{v}\cdot \mathrm{grad}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

Dlatego równanie ciągłości może być napisano w postaci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot \mathrm{grad}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$$

Równanie ciągłości gęstości opisuje zachowanie masy.

Matematyka: różniczkowanie wektorowe

Operator „*nabla*” (jest wektorem):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \qquad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Operator Laplace’a (jest skalarem):

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla_i \nabla_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{grad} a = \nabla a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Twierdzenie Gaussa (przejście od całki po zamkniętej powierzchni do całki po objętości, ograniczonej powierzchnią):

$$\oint_{S_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_0} \operatorname{div}\mathbf{A}\, dV \qquad\qquad dS_i \rightarrow dV\nabla_i$$

$$\oint_{S_0} a\, d\mathbf{S} = \int_{V_0} (\operatorname{grad} a)\, dV$$

Twierdzenie Stokesa (przejście od całki po konturze do całki po powierzchni, ograniczonej konturem):

$$\oint_{l_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_0} (\operatorname{rot}\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Równanie Eulera

Siła, działająca na objętość V_0 cieczy:

$$\mathbf{F} = -\oint_{S_0} p\, d\mathbf{S} = -\int_{V_0} (\mathrm{grad}\, p)\, dV$$

Równanie ruchu (2-ga zasada dynamika Newtona):

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho\mathbf{v}\, dV = -\int_{V_0} (\mathrm{grad}\, p)\, dV$$

$$\rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, p$$

Dla cieczy prędkość **v** zależy od **r** i od *t* : **v**(**r**,*t*). Dlatego

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$$

Równanie Eulera (1755 r.):

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p}$$

Równanie Eulera opisuje ruch cieczy idealnej.

Strumień pędu

Pęd jednostki objętości jest $\rho\mathbf{v}$. Prędkość zmiany pędu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{v} + \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

Z równania ciągłości

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})$$

Z równania Eulera

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v} = -\mathbf{v}\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} - \mathrm{grad}\,p$$

Otrzymane równanie zapisane przez składowe

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -v_i \nabla_j(\rho v_j) - \rho v_j \nabla_j v_i - \nabla_i p$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\nabla_j(\rho v_i v_j) - \nabla_i p$$

W wyniku dostajemy ***równanie ciągłości strumienia pędu:***

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\nabla_j \Pi_{ij}}$$

gdzie Π_{ij} – ***tensor gęstości strumienia pędu:***

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij} p + \rho v_i v_j$$

Został wykorzystany ***tensor jednostkowy*** δ_{ij} , zdefiniowany jak δ_{ij} =1 przy $i=j$ i δ_{ij} =0 przy $i \neq j$

Równanie ruchu cieczy lepkiej

Równanie ruchu Eulera może być uogólnione

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\nabla_j \Pi_{ij}$$

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij}p + \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \rho v_i v_j$$

gdzie σ'_{ij} – ***tensor lepkich naprężeń***,

σ_{ij} – ***tensor naprężeń***

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

Ogólna postać tensora lepkich naprężeń, spełniająca pewne warunki fizyczne

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_k v_k\right) + \xi\delta_{ij}\nabla_k v_k$$

gdzie η i ξ – ***współczynniki lepkości***, $\eta>0$, $\xi>0$ (ξ jest nazywane drugą lepkością)

Po podstawieniu tensora lepkich naprężeń do równania Eulera dostajemy:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \nabla_j v_i\right) = -\nabla_i p + \nabla_j\left[\eta\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\nabla_k v_k\right)\right] + \nabla_i\left(\xi \nabla_k v_k\right)$$

i przy stałych η i ξ otrzymujemy ***równania Naviera-Stokesa:***

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right) = -\mathrm{grad}\, p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}}$$

Równanie Naviera-Stokesa opisuje ruch cieczy lepkiej.

Równanie Naviera-Stokesa dla cieczy lepkiej nieściśliwej

Dla nieściśliwej cieczy div **v** = 0.

W tym przypadku równanie Naviera-Stokesa przyjmuje postać

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\mathbf{v}}$$

gdzie $\nu=\eta/\rho$ – ***współczynnik lepkości kinematycznej***
(η – ***współczynnik lepkości dynamicznej****)*

Tensor naprężeń w cieczy nieściśliwej

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$$

W nieściśliwej cieczy lepkość opisuje się tylko jednym współczynnikiem *η*.