4. Pole elektromagnetyczne

Rzeszów University of Technology

23 listopada 2023

Tensor pola elektromagnetycznego

- Wprowadzimy antysymetryczny 4-tensor pola elektromagnetycznego

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \tag{1}$$

  gdzie A_j - 4-potencjał pola

- Korzystając z tego, że $A_i = (\varphi, -\vec{A})$ i definicjami $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, przedstawimy tensor pola elektromagnetycznego jak macierz

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

  Jak widać z tego wyrażenia, **4-tensor pola elektromagnetycznego składa się ze składowych pól elektrycznego $\vec{E}$ i magnetycznego $\vec{B}$**.

  Wzór dla F^{ij} różni się od (2) znakiem $\vec{E}$.

Działanie dla pola elektromagnetycznego

- Wyrażenie dla działania pola wybieramy jak skalar, który zależy od pochodnych 4-potencjału, tzn. od 4-tensora pola elektromagnetycznego

$$S_{pola} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ij} F^{ij} \, d\Omega, \tag{3}$$

  gdzie całkowanie po 4-przestrzeni, $d\Omega = c\,dt\,d^3r$, współczynnik w (3) jest określony przez wybrany układ jednostek (korzystamy się układem Gaussa).
- Podstawiając (2) w (3) możemy znaleźć

$$S_{pola} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - B^2) \, d^3r \, dt \tag{4}$$

- Odpowiednio lagrangian pola elektromagnetycznego

$$L_{pola} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - B^2) \, d^3r \tag{5}$$

Działanie pola w układzie z elektronami

Korzystając z zasady najmniejszego działania znajdziemy pole elektromagnetyczne **w układzie z pewnym rozkładem poruszających się elektronów**.

- Zaczynamy od działanie pola elektromagnetycznego przy jego oddziaływaniu z n elektronami

$$S = -\frac{e}{c}\sum_n \int_{C_n} A_i dx^i - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ij}F^{ij}\, d\Omega\,, \tag{6}$$

  gdzie pierwszy człon opisuje oddziaływania pola z elektronami, każdy z których przemieszcza się wzdłuż pewnej linii świata C_n w czasoprzestrzeni.

- Wprowadzimy 4-wektor gęstości prądu elektrycznego

$$j^i = \rho\,\frac{dx^i}{dt}\,, \tag{7}$$

  gdzie ρ - gęstość ładunku elektrycznego. Ponieważ $x^i = (ct, \vec{r})$, ze wzoru (7) wynika, że $j^i = (c\rho, \rho\vec{v})$.

- Równanie (6) możemy przedstawić w postaci

$$S = -\frac{1}{c^2}\int A_i j^i\, d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ij}F^{ij}\, d\Omega, \tag{8}$$

Równania Maxwella

- Znajdziemy wariację działania (8) przy wariacji potencjału pola, $A^i \to A^i + \delta A^i$

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ij}\,\delta\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right)\right]d\Omega = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}\right)\delta A_i\,d\Omega \tag{9}$$

  (wykorzystaliśmy $F^{ij} = -F^{ji}$, przecałkowaliśmy przez części i założyliśmy, że na granice obszaru całkowania pole znika).
- Warunek najmniejszego działania $\delta S = 0$ sugeruje równanie dla pola

$$\partial_j F^{ij} = -\frac{4\pi}{c}j^i \tag{10}$$

  Korzystając z wyrażenia (2) dla 4-tensora pola znajdziemy z (10)

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{11}$$

  gdzie $\vec{j} = \rho\vec{v}$ - wektor gęstości prądu w 3D. Równania (11) – równania Maxwella.
- Jeszcze dwa równania Maxwella

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{12}$$

  wynikają bezpośrednio z definicji $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ oraz $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\,\partial_t\vec{A}$ przy działaniu na nich operatorami div i rot.

  (*Dla dowolnego pola wektorowego* $\vec{\mathcal{F}}(\vec{r})$ *ma miejsce* $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\mathcal{F}} = 0$. *Dla dowolnego pola skalarnego* $\phi(\vec{r})$ *będzie* $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$).

Pod nieobecność ładunków i prądów, $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, równania (11),(12) opisują swobodne pole elektromagnetyczne

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{13}$$

Korzystając z drugiego i czwartego równania (13) znajdziemy

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{14}$$

Ponieważ dla dowolnego pola wektorowego $\vec{\mathcal{F}}(\vec{r})$ ma miejsce $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\mathcal{F}} = -\Delta\vec{\mathcal{F}} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\mathcal{F}}$ (gdzie Δ - operator Laplace'a), z uwzględnieniem pierwszego i trzeciego równania (13) dostajemy

$$\Delta\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \Delta\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \tag{15}$$

Rozwiązaniem (15) są **fale płaskie**

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}, \qquad \vec{B} = \vec{B}_0\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}, \tag{16}$$

gdzie **wektor falowy** $\vec{k}$ **i częstość kołowa** ω **są związane liniowo,** $\omega = ck$.

Po podstawieniu (16) do (15) znajdziemy, że wektory $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ są prostopadłe do siebie, i $E_0 = B_0$.