FIZYKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

Vitalii Dugaev

Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
Politechnika Rzeszowska

Semestr zimowy, rok 2017/2018

Tensor odkształcenia

- Pod wpływem odkształcenia ciała stałego punkt ciała **r** przemieści się w położenie **r'**.

Wektor odkształcenia

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad\qquad u_i = x'_i - x_i$$

- Odległość miedzy **r** i **r+dr** przed odkształceniem

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

a po odkształceniu

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$$

gdzie

$$dx'_i = dx_i + du_i, \qquad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

- Związek między *dl* i *dl'*

$$
\begin{aligned}
dl'^2 &= \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j\right)\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_k\right) \\
&= dl^2 + 2\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_j\, dx_k \\
&= dl^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_i dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, dx_j dx_i + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx_j\, dx_i \\
&= dl^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j
\end{aligned}
$$

gdzie **tensor odkształcenia**

$$
u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)
$$

- Dla małych odkształceń

$$
\boxed{u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}
$$

Tensor napięć

- Siła wypadkowa działająca na objętość V_0

$$\int_{V_0} \mathbf{F}\, dV$$

gdzie **F** – siła, działająca na jednostkę objętości ciała.

- Przedstawimy wektor F_i w postaci dywergencji tensora:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

- Wtedy za pomocą twierdzenia Stokesa znajdziemy

$$\int_{V_0} F_i dV = \int_{V_0} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, dV = \oint_{S_0} \sigma_{ij}\, dS_j$$

gdzie σ_{ij} - **tensor napięć (tensor naprężenia)**

$\sigma_{ij}\, dS_j$ – *i*-składowa siły, działającej na element powierzchni dS_j.

Jeśli elementy powierzchni są wybrany w płaszczyznach *xy, yz, xz*, to σ_{xx}, σ_{yx}, σ_{zx} są składowymi siły, działającej na jednostkę powierzchni *yz*.

- Moment sił, działających na objętość V_0 jest $\mathbf{M} = \int_{V_0} (\mathbf{F} \times \mathbf{r})\, dV$ Przedstawiamy go w postaci tensora

$$
\begin{aligned}
M_{ij} &= \int_{V_0} (F_i x_j - F_j x_i)\, dV \\
&= \int_{V_0} \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\, x_j - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}\, x_i \right) dV \\
&= \int_{V_0} \frac{\partial(\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)}{\partial x_k}\, dV - \int_{V_0} \left(\sigma_{ik}\, \frac{\partial x_j}{\partial x_k} - \sigma_{jk}\, \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) dV \\
&= \int_{V_0} \frac{\partial(\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)}{\partial x_k}\, dV - \int_{V_0} (\sigma_{ik}\, \delta_{jk} - \sigma_{jk}\, \delta_{ik})\, dV \\
&= \int_{V_0} \frac{\partial(\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)}{\partial x_k}\, dV - \int_{V_0} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})\, dV
\end{aligned}
$$

- Tensor M_{ij} może być przedstawiony jak całka powierzchniowa tylko wtedy gdy $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ – tensor napięć jest **symetrycznym**.

- Za pomocą twierdzenia Stokesa znajdziemy

$$M_{ij} = \oint_{S_0} (\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)\, dS_k$$

- Przy wszechstronnym ściskaniu ciała

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

- W stanie równowagi F_i=0, tzn.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$ - równanie stanu równowagi

- Jeśli ciało znajduje się w polu siły ciężkości, to w stanie równowagi $\mathbf{F} + \rho \mathbf{g} = 0$, tzn.

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0}$$

Termodynamika odkształcania

- Praca wykonana przy małym odkształceniu

$$\delta R = -\sigma_{ij}\delta u_{ij}$$

- Zmiana energii wewnętrznej

$$dE = T\,dS + \sigma_{ij}\,du_{ij}$$

- Zmiana energii swobodn $F = E - TS$

$$dF = -S\,dT + \sigma_{ij}\,du_{ij}$$

Dlatego znajdziemy

$$\boxed{\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)_T}$$

Prawo Hooke'a

Rozpatrujemy **ciało izotropowe**

- Rozkład energii swobodnej względem odkształcenia

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2$$

gdzie λ, μ – współczynniki Lamégo

- Zmiana objętości przy odkształceniu jest u_{ii}. Jeśli $u_{ii}=0$, to odkształcenie jest **ścinaniem prostym**.

- Możemy przedstawić odkształcenie w postaci sumy ścinania prostego i **ściskania wszechstronnego**

$$u_{ij} = \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk}$$

- Energia swobodna (skalar), związana z odkształceniem:

$$F = \mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij} u_{kk} \right)^2 + \frac{K}{2}\, u_{kk}^2$$

gdzie *K* – **moduł ściskania (moduł ściśliwości)**, *μ* – **moduł ścinania (moduł sztywności)**

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\,\mu$$

- Powinno być *K*>0, *μ*>0.

- Różniczka zupełna energii swobodnej:

$$\begin{aligned} dF &= K u_{kk}\, du_{kk} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij} \right) d \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij} \right) \\ &= K u_{kk}\, du_{kk} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij} \right) du_{ij} \\ &= \left[K u_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij} \right) \right] du_{ij} \end{aligned}$$

Znajdziemy stad tensor napięć:

$$\sigma_{ij} = K u_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}\,u_{kk}\,\delta_{ij}\right)$$

- Odwrotny wzór - **prawo Hooke'a:**

$$\boxed{u_{ij} = \frac{1}{9K}\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right)}$$

- Przy jednorodnym ściskaniu

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}, \qquad u_{ii} = -\frac{p}{K}$$

- Wielkość 1/*K* – **współczynnik ściskania wszechstronnego (współczynnik ściśliwości)**

$$\boxed{\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$$

Odkształcenia jednorodne

- Przy odkształceniu jednorodnym tensor napięć jest **stałym** w objętości ciała

Rozpatrujemy **proste rozciąganie pręta** wzdłuż osi *z*.

- Wszystkie składowe tensora napięć prócz σ_{zz} są równe zeru, $\sigma_{zz}=p$

Z prawa Hooke'a znajdziemy składowe tensora odkształcenia

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p, \qquad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p$$

W wyrażeniu dla u_{zz} (względne wydłużenie pręta) współczynnik przy p – **współczynnik rozciągania**, a wielkość odwrotna – **moduł rozciągania** albo **moduł Younga** E

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}$$

- Współczynniki przy u_{xx} i u_{yy} opisują względne ściśnięcie pręta w kierunku poprzecznym

- Stosunek ściśnięcia poprzecznego do wydłużenia podłużnego – **współczynnik Poissona** *σ*

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \qquad \sigma = \frac{1}{2}\,\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}$$

- Względny wzrost objętości pręta podczas rozciągania

$$u_{ii} = \frac{p}{3K}$$

- Związek *E, σ* ze współczynnikami Lamégo

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$$

- Prawo Hooke'a przy małych napięciach niejednorodnych można przedstawić za pomocą *E, σ*

$$u_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\,\sigma_{ij} - \sigma\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right]$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left[u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,u_{kk}\,\delta_{ij}\right]$$

Równania równowagi ciał izotropowych

- Do równania
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$$
podstawiamy tensor napięć
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{kk}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j}$$
i także podstawiamy tensor odkształcenia
$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$
- W wyniku dostajemy **równania równowagi**

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{E}{2((1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \rho g_i = 0$$

- W oznaczeniach wektorowych

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \longrightarrow \mathbf{\Delta u}, \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \operatorname{div} \mathbf{u}$$

- Równanie równowagi przyjmuje postać

$$\boxed{\mathbf{\Delta u} + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\,\frac{2(1+\sigma)}{E}}$$

Matematyka: najważniejsze wzory analizy wektorowej

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} \\
&\operatorname{div}\operatorname{grad} a = \Delta a \\
&\operatorname{rot}\operatorname{grad} a = 0 \\
&\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0
\end{aligned}
}
$$

- Skorzystamy się z 1-go wzoru i dostajemy równanie równowagi w innej postaci

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\,\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}$$

- Bez sił objętościowych spowodowanych działaniem sił ciężkości

$$\boxed{2(1-\sigma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - (1-2\sigma)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0}$$

- Siły zewnętrzne pojawiają się za pośrednictwem warunków brzegowych

- Stosujemy do tego równania operator div i wzory analizy wektorowej. W wyniku dostajemy

$$\Delta\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$$

- W matematyce funkcja *f*, dla której Δ *f* = 0 jest nazywana **funkcja harmoniczną.**

- Dlatego wielkość div **u** określająca zmianę objętości w wyniku odkształcenia jest **funkcja harmoniczną**

- Stosując do tego samego równania operator Laplace'a otrzymujemy warunek

$$\Delta\Delta\,\mathbf{u} = 0$$

co znaczy że w stanie równowagi wektor odkształcenia **u** spełnia **równanie biharmoniczne**.

Własności sprężyste kryształów

- Ogólne wyrażenie dla energii swobodnej kryształu

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}$$

  gdzie λ_{iklm} – **tensor modułów sprężystości** (tensor 4-go rzędu)

- Własności symetrii

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}$$

- Tensor napięć

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm} u_{lm}$$

- Symetria kryształów prowadzi do zmniejszenia niezależnych składowych tensora modułów sprężystości

- W **układzie regularnym** jest tylko 3 niezależnych składowych i wyrażenie na energię swobodną ma postać

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy}(u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz})$$
$$+ 2\lambda_{xyxy}(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2)$$