FIZYKA II

Vitalii Dugaev

Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
Politechnika Rzeszowska

Semestr letni, rok 2017/2018

Równania Maxwella

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\mathrm{wewn}}/\varepsilon_0$$

prawo Gaussa dla elektryczności

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

prawo Gaussa dla magnetyzmu

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

prawo Faradaya

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_{\mathrm{p}}$$

uogólnione prawo Ampère'a

Równania Maxwella w postaci równań różniczkowych

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{V}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}}{S}$$

definicja dywergencji i rotacji pola wektorowego

ρ – gęstość ładunku elektrycznego

j – gęstość prądu elektrycznego

Matematyka: różniczkowanie wektorowe

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- operator nabla

$$\operatorname{grad} a = \nabla a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Skalarny i wektorowy potencjały pola

Pola elektryczne i magnetyczne, związane z potencjałem skalarnym i wektorowym:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot}\mathbf{A} \end{aligned}}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Inaczej może być napisano:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$\Rightarrow$ Dwa równania Maxwella są wykonane automatycznie:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$\varphi(\mathbf{r},t)$ – potencjał skalarny

$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ – potencjał wektorowy

Wektory czterowymiarowe (czterowektory)

4-wektor wodzący x^i ma składowe

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

4-wektorem A^i nazywamy zespół czterech wielkości A^0, A^1, A^2, A^3, które przy przekształceniach 4-wymiarowego układu współrzędnych tak się przekształcają jak współrzędne 4-wektora wodzącego x^i

Na przykład, w przypadku przekształcenia Lorentza

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3$$

Kowektor A_i :

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3$$

Będziemy posługiwali się zapisem:

$$A^i = \left(A^0,\ \mathbf{A}\right), \qquad A_i = \left(A_0,\ -\mathbf{A}\right)$$

4-wektor wodzący:

$$x^i = \left(ct,\ \mathbf{r}\right), \qquad x_i = \left(ct,\ -\mathbf{r}\right)$$

Przejście od 4-wektorów do 4-kowektorów:

$$A_i = g_{ik} A^k, \qquad A^i = g^{ik} A_k$$

- sumowanie po *k:*

$$A_1 = g_{10} A^0 + g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3$$

gdzie g^{ik} lub g_{ik} – ***tensor metryczny:***

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prędkość 4-wymiarowa:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Kwadrat długości 4-wektora

$$A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$$

nie zmienia się przy transformacjach Lorentza

Kwadrat długości 4-wektora wodzącego:

$$x^i x_i = c^2 t^2 - r^2 = ds^2$$

Cząsteczka w polu elektromagnetycznym

Działanie charakteryzujące ładunek w polu

$$S = \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A^i dx_i \right)$$

gdzie A^i – 4-potencjał pola $\qquad A^i = (\varphi,\ \mathbf{A})$

$\varphi = A^0$ - ***potencjał skalarny***, A - ***potencjał wektorowy***

$$S = \int_a^b \left(-mc\, ds - e\varphi\, dt + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right)$$

Funkcja Lagrange'a ładunku w polu elektromagnetycznym:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \underbrace{- e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}_{\text{oddziaływanie z polem}} \qquad S = \int_a^b L\, dt$$

Dla małych prędkości, *v<<c:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$$

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

Równanie ruchu w mechanice Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

Pęd cząstki:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Natężenie pola elektrycznego:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi$$

Natężenie pola magnetycznego:

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

Symetria względem zmiany znaku czasu:

$$t \to -t$$

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$$

Równanie ruchu cząstki przyjmuje postać:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}}$$

Równanie ruchu przy małych prędkości, v<<c:

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}}_{\text{siła Lorentza}}$$

Działanie dla pola elektromagnetycznego

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}\,F^{ik}\,d\Omega$$

gdzie F_{ik} – ***tensor pola elektromagnetycznego***

$$\boxed{F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}}$$

4-wymiarowy element objętości:

$$d\Omega = cdt\,dx\,dy\,dz = cdt\,dV$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Działanie dla cząsteczki w polu:

$$S = -\sum \int mc\, ds - \frac{1}{c^2} \int A_i\, j^i\, d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}\, F^{ik}\, d\Omega$$

gdzie j^i – 4-wektor prądu:

$$\boxed{j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}}$$

$$j^i = (c\rho,\ \mathbf{j})$$

ρ - gęstość ładunku, **j** – trójwymiarowy wektor gęstości prądu

Równania pola elektromagnetycznego

Pierwsza para równań Maxwella

(w układzie jednostek CGS)

Z definicji $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, $\quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi$

dostajemy

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0}, \qquad \boxed{\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$$

Druga para równań Maxwella

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}\,j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\,\delta A_i\right]d\Omega = 0$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}\,j^i$$

W postaci trójwymiarowej:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}} \qquad \boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho}$$

Stephen Hawking (1942 – 2018)