5. Elektrodynamika ośrodków ciągłych

Rzeszów University of Technology

17 stycznia 2024

Literatura

- L.D. Landau i J.M. Lifszyc. Elektrodynamika ośrodków ciągłych
- C. Kittel. Wstęp do fizyki ciała stałego
- N.W. Ashcroft, N.D. Mermin. Fizyka ciała stałego.
- M.P. Marder. Condensed Matter Physics

Równania Maxwella w ośrodku ciągłym

Równania Maxwella w elektrodynamice klasycznej

$$\operatorname{div}\vec{e} = 4\pi\rho, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{h} = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} \tag{4}$$

gdzie $\vec{e}$ i $\vec{h}$ – mikroskopowe pola elektryczne i magnetyczne, ρ – gęstość ładunku, $\vec{v}$ - prędkość naładowanych cząsteczek (elektronów).

Przejście w równaniach Maxwella od mikroskopowego pola elektrycznego $\vec{e}$ do makroskopowego pola $\vec{E}$ i od mikroskopowego pola magnetycznego $\vec{h}$ do makroskopowego pola $\vec{B}$

$$\vec{E} = \overline{\vec{e}}, \qquad \vec{B} = \overline{\vec{h}} \tag{5}$$

gdzie uśrednienie po objętości makroskopowej. Makroskopowe pole $\vec{E}$ nazywamy **natężeniem pola elektrycznego**. Makroskopowe pole $\vec{B}$ nazywamy **indukcją magnetyczną**.

Elektrostatyka przewodników

W elektrostatyce ($\vec{h} = 0$ i pole wektorowe $\vec{e}(\vec{r})$ nie zależy od czasu) średnie pole elektryczne wewnątrz przewodnika jest równe zeru, $\vec{E} = 0$.

Na zewnątrz przewodnika (w próżni, gdzie $\rho = 0$) równania pola

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \tag{6}$$

Równania (6) są spełnione dla pola potencjalnego

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{7}$$

(φ – potencjał pola) spełniającym równanie Laplace'a

$$\Delta\varphi = 0 \tag{8}$$

Na powierzchni przewodnika powinny być spełnione warunki brzegowe:

- składowa pola wzdłuż powierzchni, $\vec{E}_t = 0$
- składowa pola prostopadła do powierzchni, $\vec{E}_n = 4\pi\sigma$, gdzie σ - gęstość ładunku na powierzchni

Pierwszy z tych warunków oznacza, że powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną, $\varphi = const$ na powierzchni. Drugi warunek: $-\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma$ (pochodna w kierunku prostopadłym do powierzchni)

Elektrostatyka dielektryków

Równania Maxwella dla pola elektrostatycznego w dielektryku

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\overline{\rho}, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{9}$$

gdzie $\rho(\vec{r})$ – rozkład gęstości ładunków zawartych w dielektryku.

Wprowadzimy wektor polaryzacji dielektrycznej $\vec{P}$ przez równanie

$$\overline{\rho} = -\mathrm{div}\,\vec{P} \tag{10}$$

Wtedy zamiast (9) dostajemy równania

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{11}$$

gdzie $\vec{D}$ – wektor indukcji elektrycznej,

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{12}$$

Znajdziemy całkowity moment dipolowy wszystkich ladunków wewnętrznych w objętości V_0 obejmującej ciało

$$\int_{V_0} \vec{r}\,\overline{\rho}\,dV = -\int_{V_0} \vec{r}\,\mathrm{div}\,\vec{P}\,dV \tag{13}$$

Wektorowe równanie (13) w składowych

$$\int_{V_0} r_i \overline{\rho}\,dV = -\int_{V_0} r_i\,(\nabla_j P_j)\,dV \tag{14}$$

$$= -\int_{V_0} \nabla_j (r_i P_j)\,dV + \int_{V_0} P_j (\nabla_j r_i)\,dV \tag{15}$$

$$= -\int_{S_0} r_i P_j\,dS_j + \int_{V_0} P_j (\nabla_j r_i)\,dV \tag{16}$$

$$= \int_{V_0} P_j (\nabla_j r_i)\,dV = \int_{V_0} P_i\,dV \tag{17}$$

(wektor polaryzacji poza ciałem jest równy zeru), tzn. wektor polaryzacji $\vec{P}$ jest momentem dipolowym jednostkowej objętości dielektryka.

Jeżeli do dielektryka wprowadzimy ładunki obce, to

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi \rho_{obc} \tag{18}$$

Warunki na powierzchni rozdziału dwóch izolatorów

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}, \qquad D_{n1} = D_{n2} \tag{19}$$

Przyjmujemy, że w izotropowym dielektryku polaryzacja proporcjonalna do pola $\vec{E}$

$$\vec{P} = \kappa \vec{E} \tag{20}$$

gdzie κ – podatność dielektryczna (współczynnik polaryzacji).

Przy podstawieniu do (12) dostajemy

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{21}$$

gdzie ε – przenikalność dielektryczną substancji,

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa \tag{22}$$

Warunki brzegowe na powierzchni, rozdzielającej dwa izotropowe dielektryki, przyjmują postać

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}, \qquad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \tag{23}$$

Stałe pole magnetyczne w ośrodku ciągłym

Przy uśrednieniu mikroskopowych równań Maxwella dostajemy ($\rho\vec{v}$ - mikroskopowa gęstość prądu)

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \tag{24}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\overline{\rho\vec{v}} \tag{25}$$

Zakładamy, że makroskopowy prąd $\overline{\rho\vec{v}}$ może być przedstawiony w postaci

$$\overline{\rho\vec{v}} = c\,\text{rot}\,\vec{M} \tag{26}$$

gdzie $\vec{M}$ – magnetyzacja (namagnesowanie) ciała. Wprowadzając go do równania (25) otrzymujemy

$$\text{rot}\,\vec{H} = 0 \tag{27}$$

gdzie $\vec{H}$ – natężenie pola magnetycznego, które jest związane ze średnim polem magnetycznym (indukcją magnetyczną) $\vec{B}$ równaniem

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \tag{28}$$

Znajdziemy całkowity moment magnetyczny, utworzony wszystkimi czastkami naładowanymi, które ruszą się w ciałach stałych

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c}\int_{V_0}(\vec{r}\times\overline{\rho\vec{v}})\,dV = \frac{1}{2}\int_{V_0}(\vec{r}\times\text{rot}\,\vec{M})\,dV$$
$$= \frac{1}{2}\int_{V_0}(\vec{r}\times(\nabla\times\vec{M}))\,dV \tag{29}$$

W składowych

$$\mathcal{M}_i = \frac{1}{2}\int_{V_0} (\vec{r}\times(\nabla\times\vec{M}))_i\, dV = \frac{1}{2}\int_{V_0} \epsilon_{ijk} r_j\, (\nabla\times\vec{M}))_k\, dV \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{V_0} \epsilon_{ijk}\, r_j\, \epsilon_{klm}(\nabla_l M_m)\, dV = \frac{1}{2}\int_{V_0} \epsilon_{ijk}\, r_j\, \epsilon_{lmk}(\nabla_l M_m)\, dV \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{V_0} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, r_j\, (\nabla_l M_m)\, dV \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{V_0} \left[r_j\, (\nabla_i M_j) - r_j\, (\nabla_j M_i) \right] dV \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{V_0} \left[\nabla_i (r_j M_j) - M_j(\nabla_i r_j) - \nabla_j (r_j M_i) + M_i(\nabla_j r_j) \right] dV \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int_{S_0} r_j M_j\, dS_i - \int_{V_0} M_i\, dV - \int_{S_0} r_j M_i\, dS_j + 3\int_{V_0} M_i\, dV \right\} \tag{35}$$

$$= \int_{V_0} M_i\, dV \tag{36}$$

tzn., że $\vec{M}$ jest momentem magnetycznym jednostki objętości ciała.

W ciałach izotropowych namagnesowanie jest proporcjonalne do natężenia pola $\vec{H}$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \tag{37}$$

gdzie χ – podatność magnetyczna.

Przy podstawieniu tego wzoru do $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$ dostajemy

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{38}$$

gdzie μ – przenikalność magnetyczna,

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \tag{39}$$

Jeśli w przewodniku istnieje makroskopowy prąd $\vec{j}$, to równania dla natężenia pola $\vec{H}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{40}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{41}$$