

FIZYKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

Vitalii Dugaev

*Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
Politechnika Rzeszowska*

Semestr zimowy, rok 2017/2018



Fale sprężyste w ośrodku ciągłym

- Równanie ruchu jednostki objętościowej w ośrodku izotropowym

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

Przy podstawieniu prawej części dostajemy **równanie dynamiki ruchu fali sprężystej**

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \text{grad div } \mathbf{u}$$

- Równania dla składowych płaskiej fali sprężystej, $\mathbf{u}(x, t)$

$$\rho \ddot{u}_x = \left[\frac{E}{2(1+\sigma)} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

$$\rho \ddot{u}_y = \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Można to przedstawić w innej postaci

2

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_{y,z}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_{y,z}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}}$$

gdzie **podłużna i poprzeczna prędkości dźwięku**

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1 - \sigma)}{\rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}}$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \sigma)}}$$

$$c_l > c_t$$

- Równanie fali $u_i(x, t) = u_{0i} e^{i(kx - \omega t)}$

Przy podstawieniu do równań ruchu dostajemy

$$(c_l^2 k_l^2 - \omega^2) u_x = 0$$

$$(c_t^2 k_t^2 - \omega^2) u_{y,z} = 0$$

$$\omega = c_l k_l$$

$$\omega = c_t k_t.$$

Fale sprężyste w kryształach

- W ośrodku anizotropowym

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}$$

Przy podstawieniu dostajemy

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} = \frac{\lambda_{iklm}}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \end{aligned}$$

albo

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}$$

- Podstawiamy równanie fali $u_i = u_{0i} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ i dostajemy

$$\rho \omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m$$

Układ tych równań ma rozwiązanie niezerowe pod warunkiem

$$\det (\lambda_{iklm} k_l k_m - \rho \omega^2 \delta_{im}) = 0$$

Wprowadzimy oznaczenie

$$a_{im} = \lambda_{iklm} k_k k_l$$

i dostajemy równanie dla częstotliwości ω

$$\det \begin{pmatrix} a_{xx} - \rho \omega^2 & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} - \rho \omega^2 & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} - \rho \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

– równanie 3-go rzędu dla ω^2 . Pierwiastki prowadzą do trzech różnych zależności $\omega(\mathbf{k})$ – **widmo fal sprężystych w kryształach ma 3 gałęzi** – są to fale akustyczne ponieważ częstotliwość jest równa zero przy $\mathbf{k}=0$.

- **Prędkość grupowa fali**

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}$$

Odształcenie przy zmianie temperatury

- Energia swobodna przy odkształceniu

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0) u_{ll} + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2$$

gdzie μ i K – moduły wszechstronnego ścieśnienia i ścinania,
 α – **współczynnik rozszerzalności cieplnej**

- Tensor napięcia

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T = -K\alpha(T - T_0) \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + K u_{ll} \delta_{ik}$$

- Przy swobodnym rozszerzeniu cieplnym nie powinno być wewnętrznych napięć, $\sigma_{ik} = 0$. Z tego wynika, że $u_{ik} = \text{const } \delta_{ik}$ i

$$u_{ll} = \alpha (T - T_0)$$

Przewodnictwo ciepłe ciał stałych

- Ilość ciepła absorbowanego w jednostkę czasu w jednostce objętości jest

$$T \frac{\partial S}{\partial t}$$

Z kolei równanie ciągłości dla ilości ciepła

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q}$$

gdzie \mathbf{q} – gęstość strumienia ciepła,

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

κ – współczynnik przewodnictwa cieplnego

- Entropia z dokładnością do członów 1-go rzędu po odkształceniu

$$S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = S_0(T) + K \alpha u_{ll}$$

- Podstawiamy wyrażenie dla entropii w równanie ciągłości, przyjmując, że $\kappa = \text{const}$

$$T \frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha K T \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} = \kappa \nabla T$$

- Pochodna od S_0 po t może być zapisana

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Pochodna $\partial S_0 / \partial T$ jest liczona przy $u_{ii} = \text{div } \mathbf{u} = 0$, tzn. przy stałej objętości, czyli

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial T} \right)_V = \frac{C_v}{T}$$

W wyniku dostajemy **równanie przewodnictwa cieplnego**

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha K T \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{u} = \kappa \nabla T$$

- Jeśli przy rozszerzeniu nie ma naprężenia wewnętrznego, na przykład **przy swobodnym cieplnym rozszerzeniu pręta**, to pochodna entropii powinna być obliczona przy **stałym ciśnieniu**

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial T} \right)_P = \frac{C_p}{T}$$

W tym przypadku równanie przewodnictwa cieplnego dla $T(x,t)$ przyjmuje postać

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- Faktycznie równanie przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych zawsze można przedstawić w postaci

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

gdzie χ – **współczynnik przewodnictwa temperaturowego**, $\chi = \kappa / C$, C – średnia pojemność cieplna (ponieważ $C_p \approx C_v \approx C$, i dlatego drugi człon w równaniu przewodnictwa cieplnego jest zawsze bardzo mały)

Przewodnictwo cieplne w kryształach

- W kryształach anizotropowych strumień ciepła może być w innym kierunku niż gradient temperatury. Dlatego

$$q_i = -\kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

gdzie κ_{ik} – **tensor przewodnictwa cieplnego**

- Równanie przewodnictwa ciepła przyjmuje postać

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}$$

- Tensor κ_{ik} jest **symetrycznym**, $\kappa_{ik} = \kappa_{ki}$ (według zasady Onsagera symetrii współczynników kinetycznych)

- Równania Maxwella w ośrodku ciągłym

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}$$

gdzie \mathbf{e} i \mathbf{h} – mikroskopowe pola elektryczne i magnetyczne

- Przy uśrednieniu po objętości makroskopowej dostajemy makroskopowe pola

$$\boxed{\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{h}}}$$

Pole \mathbf{B} – wektor indukcji magnetycznej

Elektrostatyka przewodników

- W przypadku statycznym bez pola magnetycznego w próżni

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

- Dla pola potencjalnego (φ – potencjał), tzn. przy

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

drugie równanie zostanie spełnione automatycznie, natomiast z pierwszego dostajemy **równanie Laplace’a dla potencjału**

$$\Delta \varphi = 0$$

- Na powierzchni przewodnika pole elektryczne \mathbf{E} powinno być normalne do powierzchni, $\mathbf{E}_t = 0$. Innymi słowy, *powierzchnia przewodnika stanowi powierzchnię ekwipotencjalną pola elektrostatycznego.*

Elektrostatyka dielektryków

- W statyce równania Maxwella dla dielektryka po uśrednieniu (bez pola magnetycznego)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

gdzie ρ – **gęstość ładunków zawartych w dielektryku**

- Wprowadzimy **wektor polaryzacji dielektrycznej \mathbf{P}** przez równanie

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

Dostajemy równania

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

gdzie \mathbf{D} – **wektor indukcji elektrycznej**

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

- Znajdziemy całkowity moment dipolowy wszystkich ładunków wewnętrznych w objętości V_0 obejmujących ciało

$$\int_{V_0} \mathbf{r} \bar{\rho} dV = - \int_{V_0} \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV$$

Równanie może być napisane w składowych

$$\begin{aligned} \int_{V_0} r_i \bar{\rho} dV &= - \int_{V_0} r_i (\nabla_j P_j) dV \\ &= - \int_{V_0} \nabla_j (r_i P_j) dV + \int_{V_0} P_j (\nabla_j r_i) dV \\ &= - \int_{S_0} r_i P_j dS_j + \int_{V_0} P_j (\nabla_j r_i) dV \\ &= \int_{V_0} P_j (\nabla_j r_i) dV \\ &= \int_{V_0} P_i dV \end{aligned}$$

(wektor polaryzacji \mathbf{P} poza ciałem jest równy zero), tzn., że *wektor \mathbf{P} jest momentem dipolowym jednostkowej objętości dielektryka.*

- Jeżeli do dielektryka wprowadzimy ładunki obce, to dostajemy

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{obc}$$

- Warunki na powierzchni rozdziału dwóch dielektryków

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad D_{n1} = D_{n2}$$

- Przyjmujemy, że w **izotropowym dielektryku** polaryzacja \mathbf{P} jest proporcjonalna do natężenia pola \mathbf{E}

$$\mathbf{P} = \kappa\mathbf{E}$$

gdzie κ – **podatność dielektryczna** (współczynnik polaryzacji).
Przy podstawieniu do równania $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ dostajemy

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

gdzie ε – **przenikalność dielektryczna** $\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$

- Warunki na powierzchni rozdzielającej dwa izotropowe dielektryki przyjmują postać

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$