# Mechanika relatywistyczna

Działanie cząstki swobodnej

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

$a, b$ – zdarzenia $\quad ds^2 = c^2dt^2 - x^2 - y^2 - z^2$

$ds$ – interwał, $\alpha = const$ $\quad a = (t_1, \vec{r}_1)$, $b = (t_2, \vec{r}_2)$

$$ds = c\,dt' = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$dt'$ – czas własny (zegar poruszający)

$$S = -\alpha c\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

mechanika: $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$

Funkcja Lagrange'a $\quad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ – funkcja Lagrange'a swobodnej cząstki materialnej

Przy $v \ll c$: $L \simeq -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$

Stała $\alpha = mc$ wybrana tak, żeby przy $v \ll c$ otrzymać wyrażenie klasyczne $L = \frac{mv^2}{2}$

Pęd cząstki: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

Energia cząstki: $E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L \Rightarrow \boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

Dla $v = 0$ $\quad E = mc^2$ (energia spoczynkowa)

---

Rozwinięcie w szereg:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

# Elektromagnetyzm

Ładunek elektryczny – jedna z podstawowych własności cząstek elementarnych (elektrony, protony, ...)

Istnieją ładunki dodatnie i ujemne. Ładunek jest skwantowany:

Ładunek elementarny $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C (kulomb)

Elektron $-e$, proton $+e$, neutron : 0, kwarki $\pm \frac{1}{3} e$, $\pm \frac{2}{3} e$

Atomy są obojętne: liczba elektronów na orbitach jest taka sama liczba protonów w jądrze.

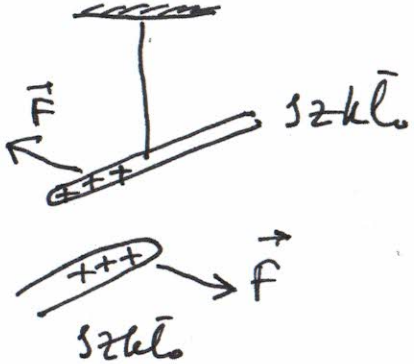
Prawo zachowania ładunku: W układzie izolowanym ładunek elektryczny jest zachowany

Anihilacja elektronu i pozytronu: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

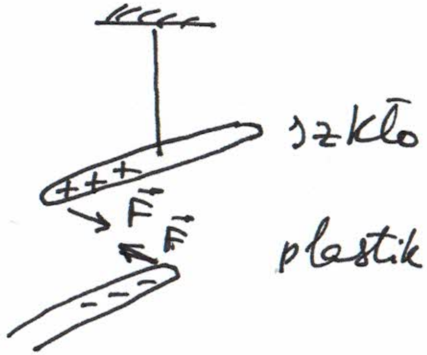
Kreacja pary $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ (proces odwrotny)

Ciało jest naładowane jeśli ma niezrównoważony ładunek (ładunek wypadkowy)

## Oddziaływanie ładunków elektrycznych




Szklany pręt pocierany jedwabiem

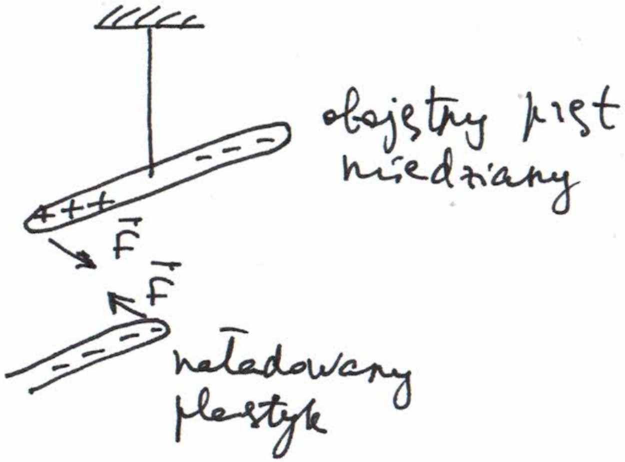



plastikowy pręt pocierany futrem

Ładunki elektryczne w takich samych znakach <u>odpychają się</u>, a ładunki elektryczne o przeciwnych znakach <u>się przyciągają</u>

Przykład: w tonerach kserokopiarki: kulka nośnika jest pokryta cząstkami tonera w wyniku przyciągania elektrostatycznego.

## Przewodniki i izolatory




<u>Przewodniki</u> – ładunki swobodnie poruszają się (metale, woda z solami, ciało ludzkie)

Istnienie elektronów swobodnych w metalach prowadzi do indukcji (rozdzielenia ładunków)

<u>Izolatory</u> – ładunki nie poruszają się (plastyk, szkło, guma, woda destylowana)

<u>Półprzewodniki</u> – materiały pośrednie między przewodnikami i izolatorami (krzem, german, arsenek galu, ...)

<u>Nadprzewodniki</u> – brak oporu przy przepływie w nich ładunku elektrycznego

## Prawo Coulomba

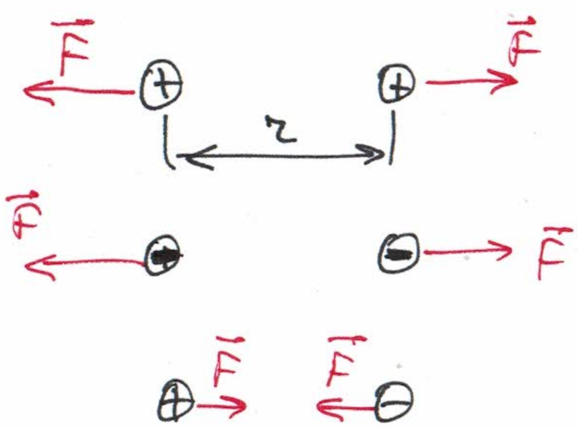
Siła elektrostatyczna między ładunkami punktowymi $q_1$ i $q_2$

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^{19}\ Nm^2/C^2$$ – stała elektrostatyczna

$\varepsilon_0$ – przenikalność elektryczna próżni

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$$




<u>Porównanie z grawitacją</u>

- taka sama zależność od r
- siła grawitacyjna – zawsze przyciągająca
- siła grawitacyjna jest bardzo słaba

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

# Oddziaływanie naładowanej kuli

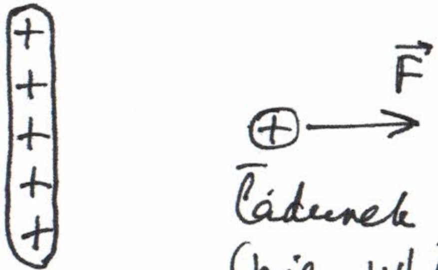
Siły elektryczne działające na dany ładunek dodają się wektorowo – – zasada superpozycji

Cząstka na zewnątrz powłoki: Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w środku

Cząstka wewnątrz powłoki: Wypadkowa siła działająca na naładowaną cząstkę, znajdującą się wewnątrz naładowanej jednorodnie powłoki, jest równa zeru.

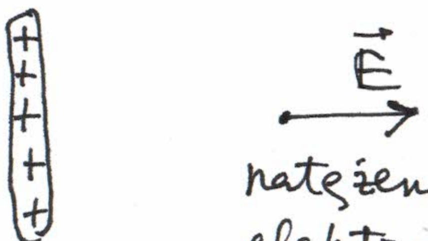
→ Ładunek cząstki jest bardzo mały, aby nie zaburzyć rozkładu ładunku na powłoce!

# Pole elektryczne




naładowane ciało

Ładunek próbny
(nie wpływa na ciało)




natężenie pola elektrycznego

## Działanie ładunków na odległość:

- Wokół danego ładunku powstaje pole elektryczne $\vec{E}$.
- przy zmianie położenia ładunku, pole elektryczne zmienia się z prędkością światła.

Pole elektryczne jest polem wektorowym: Każdy punkt pola ma przypisany wektor natężenia pola $\vec{E}$.

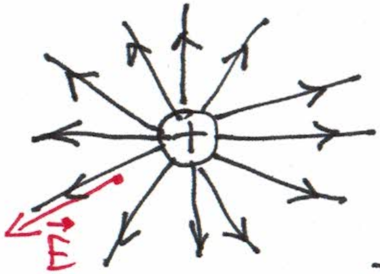
Natężenie pola elektrycznego: $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$

(Istnieją pola skalarne – np. pole temperatury)

Siła, działająca na ładunek $q_0$ w polu elektrycznym $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{F} = q_0 \vec{E}}$$

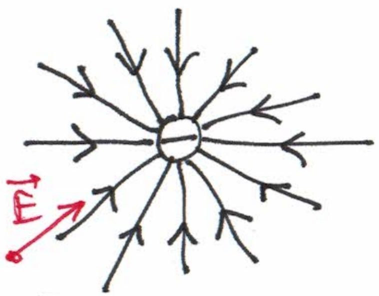
## Linie pola elektrycznego




Linie pola ładunku dodatniego

Pole elektryczne można obrazowo przedstawić używając linii sił (M. Faraday)

- Wektor $\vec{E}$ jest styczny do linii sił
- Większa gęstość linii odpowiada większej wartości $\vec{E}$
- Linie sił wychodzą z ładunków dodatnich, wchodzą do ujemnych

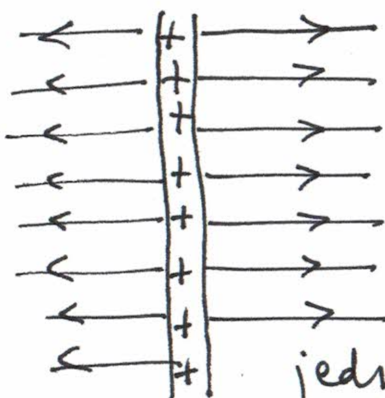



Ładunek ujemny

### Pole elektryczne ładunku punktowego $q$:

$$E = \frac{F}{q_0} = k\frac{q}{r^2} \qquad F = k\frac{q q_0}{r^2}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

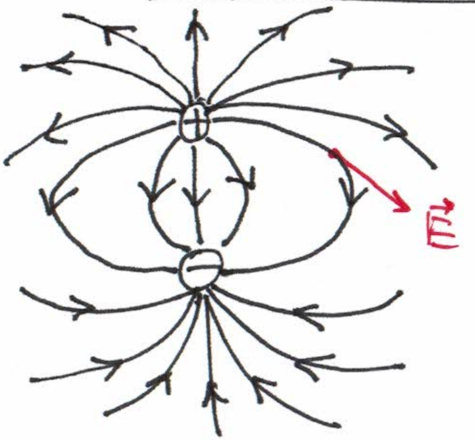


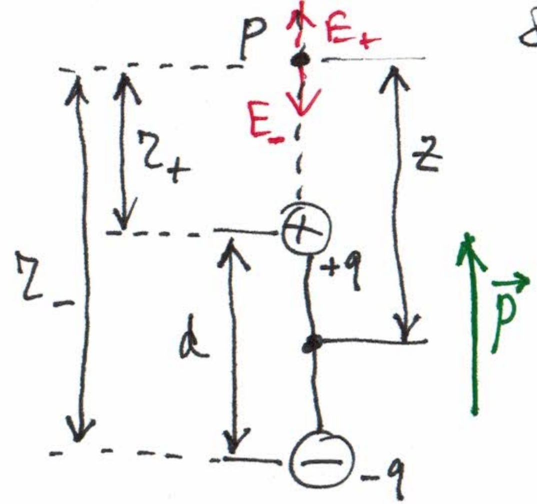
– jednorodne pole elektryczne

jednorodnie naładowane płyty

Zasada superpozycji stosuje się zarówno do natężeń pola elektrycznego, jak i sił elektrostatycznych

# Dipol elektryczny




Natężenie pola w funkcji P:

$$E = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$r_+ = z - \frac{d}{2}$$

$$r_- = z + \frac{d}{2}$$

Przy $z \gg \frac{d}{2}$ można znaleźć przez rozwinięcie w szereg po $d/2z \ll 1$

$$E \simeq \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3} \Rightarrow \underline{E \simeq \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}}, \quad p = qd$$

Wektor $\vec{p}$ jest momentem dipolowym elektrycznym dipola

W ogólnym przypadku

$$\underline{\vec{p} = \sum_a q_a \vec{r}_a}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3(\vec{n}\cdot\vec{p})\vec{n} - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

– pole na odległości $R$

$\vec{n}$ – wektor jednostkowy w kierunku $\vec{R}$

# Dodatek matematyczny:
## Rozwinięcie funkcji w szereg

Przy $|x| \ll 1$:

$$(1+x)^n \simeq 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Przy $|\theta| \ll 1$ ($\theta$ w radianach)

$$\sin\theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

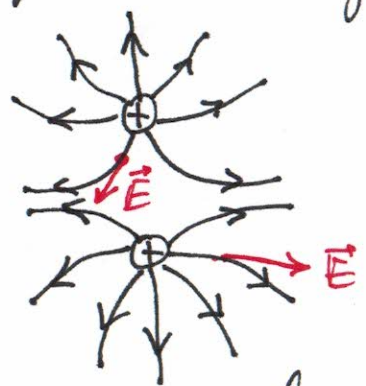
$$\mathrm{tg}\,\theta \simeq \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$$

Przykład: $$\frac{1}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{z^2}\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} \simeq \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2d}{2z}\right)$$

$n = -2$

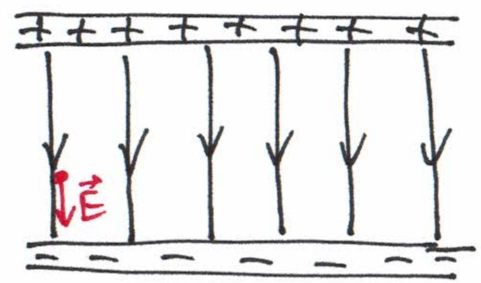
$x = -\frac{d}{2z}$

Linie pola dwóch jednakowych ładunków



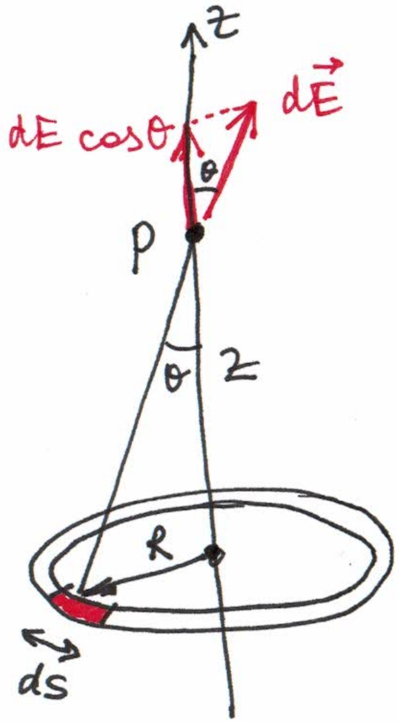

odpychanie linii pola

na zewnątrz pole $E=0$




płyty naładowane przeciwnymi ładunkami — pole jednorodne

## Naładowany pierścień




$dq = \lambda\, ds$, $\lambda$ – liniowa gęstość ładunku

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{(z^2+R^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{(z^2+R^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{z\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^{2\pi R} ds = 2\pi R$$

$$\boxed{E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Przy $z \gg R$: $E \simeq \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$

## Ładunek punktowy w polu elektrycznym:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

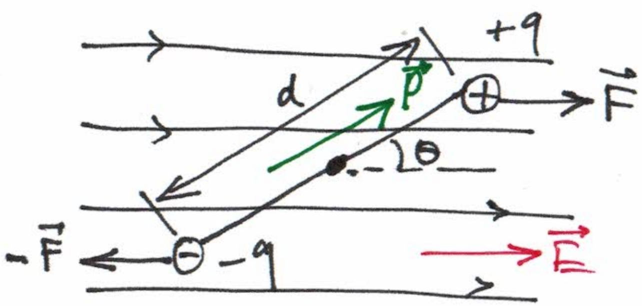
– Siła elektrostatyczna $\vec{F}$, działająca na cząstkę umieszczoną w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ ma kierunek $\vec{E}$, jeśli $q>0$, i ma przeciwny kierunek, jeśli $q<0$

## Pomiar ładunku elementarnego – doświadczenie Millikana (1910-1913)

Millikan przeanalizował ruch kropelek oleju w komorze w polu elektrycznym. Ruch kropelek można było śledzić przez lunetkę. Robert Milliken odkrył, że wartości ładunku $q$ były zawsze dane przez

$$q = ne \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C$$ – stała podstawowa

## Dipol w polu elektrycznym




W jednorodnym polu elektryczny na dipol działa moment siły

$$M = Fx \sin\theta + F(d-x)\sin\theta = Fd\sin\theta =$$
$$= pE\sin\theta$$

$F = qE$

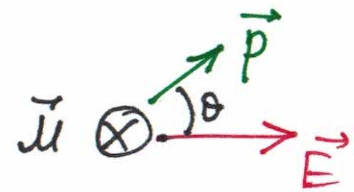
$p = qd$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

# Energia potencjalna dipola elektrycznego

Dipol ma najmniejszą energię potencjalną, gdy jest zorientowany tak, że jego moment dipolowy $\vec{p}$ jest skierowany w kierunku pola: wówczas $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$

Wybieramy zero energii potencjalnej przy $\theta = 90^\circ$




$$E_p = -W = -\int_{90^\circ}^{\theta} M \, d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin\theta \, d\theta =$$

$$= pE \int_{90^\circ}^{\theta} \sin\theta \, d\theta = -pE\cos\theta \Big|_{90^\circ}^{\theta} = -pE\cos\theta$$

$$= -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$M = pE\sin\theta$

$$\boxed{E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

- przy $\theta = 0$ $E_p = -pE$
- przy $\theta = 180^\circ$ $E_p = +pE$