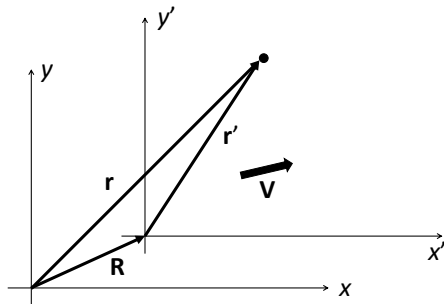


3. Mechanika relatywistyczna

Rzeszów University of Technology

22 listopada 2023

- Układ inercjalny - ten, który porusza się bez przyspieszenia, $\vec{V} = const$
- Wybór układu inercjalnego jest bez znaczenia - prawa fizyki nie zależą od wyboru układu
- Transformacja Galileusza



$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V} + \vec{v}'(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$$

- Transformacje Galileusza są niezgodne z tym, że prawa fizyki nie zależą od wyboru inercjalnego układu odniesienia ponieważ prędkość światła w tej transformacji zależy od wyboru układu
- Zamiast transformacji Galileusza w mechanice relatywistycznej - **transformacje Lorentza**
- Czas jest różny w różnych układach odniesienia
- W każdym inercjalnym układzie odniesienia z każdym miejscem przestrzeni jest związany swój własny zegar
- **"Zdarzenie"** odbywa się w pewnym miejscu przestrzeni \vec{r} w pewny moment czasu t

- Punkt w 4-wymiarowej czasoprzestrzeni oznaczamy (ct, \vec{r}) ("zdarzenie" albo "punkt świata")
- **Interwał** s pomiędzy punktami (ct_1, \vec{r}_1) i (ct_2, \vec{r}_2) jest zdefiniowany jak

$$s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \quad (1)$$

Odpowiednio, dla małych odległości $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$

- Jeśli interwał ds w pewnym wybranym inercjalnym układzie odniesienia jest bliski do zera, to w dowolnym innym inercjalnym układzie odniesienia on także będzie bliski do zera (ponieważ prędkość światła jest taka sama).

Interwał między punktami czasoprzestrzeni jest taki sam we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

- Taka definicja "odległości" przez interwał między punktami świata oznacza, że czasoprzestrzeń nie jest euklidesową, ale jest **przestrzenią Minkowskiego**

- punkt 3-wymiarowej przestrzeni jest oznaczony przez wektor $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, gdzie x_i - składowe wektora ($i = 1, 2, 3$) w pewnym wybranym układzie współrzędnych
- oznaczenie (x_1, x_2, x_3) odpowiada składowym (x, y, z)
- przy dowolnym obrocie układu współrzędnych składowe wektora \vec{r} ulegają zmianie

Przykład: przy obrocie układu współrzędnych na kąt φ wokół osi z dostajemy

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \\x'_2 &= x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, & x'_3 &= x_3\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie (x_1, x_2, x_3) i (x'_1, x'_2, x'_3) - składowe wektora \vec{r} w układach współrzędnych przed i po obrocie. **Przy obrotach nie zmienia się odległość między punktami**: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$

- **skalar** - wielkość, która nie zmienia się przy przekształceniach układu współrzędnych
- **wektor** a_i - składowe wektora (a_1, a_2, a_3) ulegają zmianie przy przekształceniu układu współrzędnych. Na przykład, przy obrocie wokół osi z

$$\begin{aligned}a'_1 &= a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi \\a'_2 &= a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi, & a'_3 &= a_3\end{aligned}\quad (3)$$

- iloczyn skalarny dwóch wektorów $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i = \sum_i a'_i b'_i$ nie zmienia się przy dowolnym przekształceniu

- **Tensor** drugiego rzędu a_{ij} ma $3 \times 3 = 9$ składowych.

Tensor 2-go rzędu a_{ij} można przedstawić jak macierz

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Składowe tensora przekształcają się jak iloczyn dwóch wektorów $a_i b_j$.

- Przykład tensora 2-go rzędu – tensor przewodnictwa σ_{ij}

Gęstość prądu elektrycznego w ciałach stałych

$$j_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j, \quad (5)$$

gdzie E_j – wektor natężenia pola elektrycznego

- Umówmy się o przedstawieniu wzoru (5) w uproszczonej postaci

$$j_i = \sigma_{ij} E_j \quad (6)$$

(domyślnie przyjmujemy, że w (6) sumujemy po powtarzalnym wskaźniku j)

- analogicznie definiujemy tensory 3-go rzędu a_{ijk} , 4-go rzędu a_{ijkl} itd.

4-wektory

- Punkt w czasoprzestrzeni oznaczamy **4-wektorem** x^i ($i = 0, 1, 2, 3$) ze składowymi $(ct, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{r})$ (tzn. $x^0 = ct$)
- Dowolny 4-wektor a^i ma składowe $(a^0, a^1, a^2, a^3) \equiv (a^0, \vec{a})$

Iloczyn skalarny

- Wprowadzimy **tensor metryczny** czasoprzestrzeni

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

- Interwał: $ds^2 = c^2(\delta t)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{ij} dx^i dx^j$
- Wprowadzimy iloczyn skalarny wektorów a^i i b^i : $a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = g_{ij} a^i b^j$
- Iloczyn skalarny nie zmienia się przy przekształceniu, w którym interwał jest niezmienniczy, $s = const.$

4-Kowektory

- Definiujemy **4-kowektor** a_i ze składowymi $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3)$
- Korzystając z (7) przedstawimy $a_i = g_{ij} a^j$ oraz $a^i = g^{ij} a_j$
- Iloczyn skalarny można przedstawić jak $a_i b^i = a^i b_i$
- Składowe tensora metrycznego $g^{ij} = g_{ij}$

Transformacja Lorentza

Przykład:

Przeprowadzimy transformację ("obrót" na kąt urojony $i\psi$ w płaszczyźnie $ct - x_1$)

$$\begin{aligned} ct &= ct' \cosh \psi + x_1' \sinh \psi \\ x_1 &= ct' \sinh \psi + x_1' \cosh \psi \\ x_2 &= x_2', \quad x_3 = x_3' \end{aligned} \tag{8}$$

Przy tej transformacji interwał nie zmienia się:

$$s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} = \sqrt{c^2(t_2' - t_1')^2 - (\vec{r}_2' - \vec{r}_1')^2}$$

Wybieramy ψ z równania: $\tanh \psi = \frac{V}{c}$. Po podstawieniu do (8) dostajemy wzory

$$t = \frac{t' + x_1' V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_1 = \frac{Vt' + x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3' \tag{9}$$

– to są transformacje Lorentza przy przejściu do układu odniesienia, który przemieszcza się z prędkością V w kierunku x_1 .

- Przekształcenie Lorentza – obrót w przestrzeni Minkowskiego, interwał jest niezmienniczy.
- Symetria w fizyce relatywistycznej – symetria względem przekształcenia Lorentza.
- Symetria Lorentza jest symetrią globalną (kąt obrotu ψ nie zależy od punktu świata)

- Działanie cząstki relatywistycznej przedstawiamy przez interwał wzdłuż linii świata C , która zaczyna się w pewnym punkcie czasoprzestrzeni a i kończy się w punkcie b

$$S(C) = -mc \int_C ds \quad (10)$$

Współczynnik $(-mc)$ został wybrany w taki sposób, żeby w granice małej prędkości ruchu cząstki równania mechaniki relatywistycznej przechodzili w równania nierelatywistyczne.

- Interwał $ds = c dt'$, gdzie dt' - czas własny (czas w układzie odniesienia, który przemieszcza się z prędkością v razem z cząstką, $dx' = 0$). Z wykorzystaniem równania (9) znajdziemy $ds = c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$. Po podstawieniu ds w (10) dostajemy

$$S(C) = -mc^2 \int_C \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad (11)$$

Ponieważ z definicji $S(C) = \int_C L dt$, my dostajemy z (11) lagrangian cząstki relatywistycznej

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (12)$$

Przy $v \ll c$, z równania (12) dostajemy $L \simeq -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$ (zauważmy, że stała $-mc^2$ w lagrangianie nie wpływa na równania ruchu).

- Pęd cząstki, która porusza się z prędkością \vec{v} jest

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (13)$$

- Energia cząstki

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (14)$$

Przy $v \ll c$ dostajemy z (14)

$$E \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad v \ll c \quad (15)$$

Wielkość $E_0 = mc^2$ - energia spoczynku.

- Elektron ma ujemny ładunek e ($e = -|e|$, gdzie $|e|$ - ładunek elementarny)
- Wprowadzimy 4-wektor $A^i = (\varphi, \vec{A})$ (4-potencjał pola), który opisuje pole elektromagnetyczne.
Składowa $A^0 = \varphi$ - **potencjał skalarny**, wektor \vec{A} - **potencjał wektorowy pola**.
- Działanie dla elektronu, który porusza się w polu elektromagnetycznym

$$S(C) = \int_C \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right), \quad (16)$$

gdzie pierwszy człon - działanie elektronu swobodnego, a drugi opisuje oddziaływanie z polem

- Działanie przedstawione w innej postaci (przez składowe 4-potencjału pola)

$$S(C) = \int_C \left(-mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right) dt \quad (17)$$

- Ponieważ z definicji $S(C) = \int_C L dt$, my dostajemy z (17) **lagrangian elektronu w polu elektromagnetycznym**

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \quad (18)$$

Równanie ruchu elektronu w polu elektromagnetycznym

Równanie ruchu w mechanice Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (19)$$

Po podstawieniu (18) dostajemy

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + e \vec{\nabla} \varphi - \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (20)$$

gdzie $\vec{\nabla}$ - operator różniczkowania wektorowego po \vec{r} (operator nabra).

Równanie (20) może być napisano w postaci równania dynamiki cząstki naładowanej, w którym występuje **siła Lorentza** - siła oddziaływania elektronu z polem elektromagnetycznym)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (21)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (22)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (23)$$

– pola elektryczne i magnetyczne w elektrodynamice Maxwella.

Zauważmy, że zmiana $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } f$, $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$, gdzie $f(\vec{r}, t)$ - dowolna funkcja, nie zmienia \vec{E} i \vec{B} (ponieważ $\text{rot grad } f = 0$) - **niezmienniczość względem cechowania**

Operator nabra $\vec{\nabla}$ – wektor różniczkowania ze składowymi $\vec{\nabla} = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Operator Laplace'a $\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2$.

Pochodne wektorowe dla pola skalarnego $\phi(\vec{r})$ i pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$

$$\text{grad } \phi \equiv \vec{\nabla} \phi = (\nabla_x \phi, \nabla_y \phi, \nabla_z \phi) \quad (24)$$

$$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z \quad (25)$$

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = (\nabla_y A_z - \nabla_z A_y, \nabla_z A_x - \nabla_x A_z, \nabla_x A_y - \nabla_y A_x) \quad (26)$$

Obliczenie przez składowe:

- $\text{grad } \phi$ – wektor ze składowymi $(\text{grad } \phi)_i = \nabla_i \phi$, ($i = x, y, z$)
- $\text{div } \vec{A}$ – skalar, $\text{div } \vec{A} = \nabla_i A_i$ (suma po i)
- $\text{rot } \vec{A}$ – wektor ze składowymi $(\text{rot } \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k$, gdzie ϵ_{ijk} - jednostkowy antysymetryczny tensor 3-go rzędu (tensor Levi-Civita), zdefiniowany tak, że $\epsilon_{xyz} = 1$ i transpozycja najbliższych wskaźników zmienia znak, na przykład, $\epsilon_{yxz} = \epsilon_{xzy} = -1$, itd.
- $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$
- $\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$, gdzie δ_{ij} – symbol Kronekera, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.
- Przykład 1: Iloczyn wektorowy $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$
- Przykład 2: $\text{div rot } \vec{A} = \nabla_i (\text{rot } \vec{A})_i = \nabla_i \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k = \epsilon_{ijk} \nabla_i \nabla_j A_k = 0$
- Przykład 3: $\text{rot grad } \phi \rightarrow \epsilon_{ijk} \nabla_j (\text{grad } \phi)_k = \epsilon_{ijk} \nabla_j \nabla_k \phi = 0$

Przedstawienie $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{C})$ przez $\vec{A} \times \text{rot } \vec{C} + \vec{C} \times \text{rot } \vec{A}$, gdzie $\vec{A}(\vec{r})$ i $\vec{C}(\vec{r})$ - pola wektorowe

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \text{rot } \vec{C})_i &= \epsilon_{ijk} A_j (\text{rot } \vec{C})_k = \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} \nabla_l C_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j \nabla_l C_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} A_j \nabla_l C_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j \nabla_l C_m = A_j \nabla_i C_j - A_j \nabla_j C_i\end{aligned}\quad (27)$$

$$(\vec{C} \times \text{rot } \vec{A})_i = C_j \nabla_i A_j - C_j \nabla_j A_i \quad (28)$$

$$(\vec{A} \times \text{rot } \vec{C})_i + (\vec{C} \times \text{rot } \vec{A})_i = \nabla_i A_j C_j - A_j \nabla_j C_i - C_j \nabla_j A_i \quad (29)$$

albo w postaci wektorowej

$$\vec{A} \times \text{rot } \vec{C} + \vec{C} \times \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (30)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{C}) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{C} + \vec{C} \times \text{rot } \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} + (\vec{C} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (31)$$

Wracamy do równania (20), w którym \vec{v} nie zależy od \vec{r} . Z wykorzystaniem (31) dostajemy (zamiast \vec{C} podstawiamy wektor \vec{v})

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (32)$$

Możemy teraz przedstawić

$$\frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{e}{c} \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) = \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{e}{c} \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} - \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{e}{c} \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} \quad (33)$$

Fizyka ciała stałego: Zjawisko Halla

Przy małych $v \ll c$, pęd elektronu $\vec{p} = m\vec{v}$. Równanie ruchu w polu elektrycznym i magnetycznym

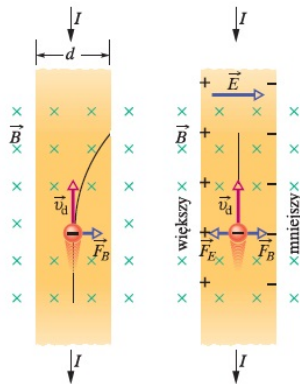
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (34)$$

Doświadczenie Halla: Próbka z prądem w polu magnetycznym (Edwin Hall, 1879)

Siła Lorentza, która działa na elektron, powoduje to, że w kierunku prostopadłym do kierunku prądu I powstaje napięcie $U_H = R_H IB$, gdzie R_H - stała Halla

$$R_H = \frac{1}{en\ell},$$

n - gęstość nośników (elektronów), ℓ - grubość próbki.



Anomalne zjawisko Halla

Jeżeli nie ma pola magnetycznego \vec{B} , ale próbka jest namagnesowana, to także pojawi się napięcie Halla (Edwin Hall, 1881), które nie jest związane z siłą Lorentza, a jest wynikiem działania poprawek relatywistycznych do równania ruchu elektronu jak cząstki kwantowej w polu jonizowanych atomów (wynikiem oddziaływania spin-orbita w relatywistycznej kwantowej teorii)

Fizyka ciała stałego: Kwantowe zjawisko Halla QHE

W cienkich warstwach półprzewodnikowych i w dużych polach magnetycznych $B \sim 15 T$ wartość napięcia Halla U_H jest **skwantyzowana** - stała Halla R_H nie zależy od parametrów materiału, a zależy tylko od ładunku elektronu e i kwantowej stałej Plancka h (Klaus von Klitzing, 1980 - nagroda Nobla, 1985)

Bardzo ważnym jest to, że ruch elektronu w silnym polu powinien być opisany jak ruch cząstki kwantowej (kwantyzacja Landaua), ale tego jest za mało dla wyjaśnienia zjawiska kwantowego Halla

Wyjaśnienie QHE polega na lokalnej symetrii cechowania potencjału wektorowego \vec{A} , który jest związany z polem magnetycznym \vec{B} , $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ (Robert Laughlin, nagroda Nobla 1998)

Istnieje także wyjaśnienie kwantowego zjawiska Halla przez topologię struktury elektronowej ciała stałego (model Thoulessa - Kohmoto - Nightingala - Nijsa)

