4. Teoria sprężystości

Rzeszów University of Technology

17 stycznia 2024

Tensor odkształcenia

Pod wpływem odkształcenia ciała stałego pewny wybrany punkt ciała $\vec{r}$ przemieści się w położenie $\vec{r}\,'$. Wektor odkształcenia

$$\vec{u} = \vec{r}\,' - \vec{r}, \qquad \text{tzn.} \qquad u_i = x_i' - x_i \tag{1}$$

Odległość między punktami ciała $\vec{r}$ i $\vec{r} + d\vec{r}$ przed odkształceniem

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \tag{2}$$

a po odkształceniu

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} \tag{3}$$

gdzie

$$dx_i' = dx_i + du_i, \qquad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j \tag{4}$$

Z równań (2)-(4) znajdziemy związek między dl' i dl

$$dl'^2 = \left(dx_i + \tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j\right)\left(dx_i + \tfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_k\right) \tag{5}$$

$$= dl^2 + 2\,\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_i dx_j + \tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\tfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_j\, dx_k \tag{6}$$

$$= dl^2 + \tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_i dx_j + \tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\, dx_j dx_i + \tfrac{\partial u_k}{\partial x_j}\,\tfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\, dx_j\, dx_i \tag{7}$$

$$= dl^2 + 2u_{ij}dx_i dx_j \tag{8}$$

gdzie wprowadziliśmy **tensor odkształcenia**

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{9}$$

Tensor odkształcenia jest symetrycznym, $u_{ij} = u_{ji}$ i dlatego ma tylko 6 niezależnych składowych u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{xz} i u_{yz}.

Przy obrotach układu współrzędnych składowe tensora transformują się.

Dla małych odkształceń

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{10}$$

Tensor napięć

Siła wypadkowa, działająca na małą makroskopową objętość V_0

$$\int_{V_0} \vec{F}\, dV \tag{11}$$

gdzie $\vec{F}$ – siła, działająca na jednostkę objętości ciała.

Dla transformacji tej całki objętościowej w całkę po powierzchni zamkniętej przedstawimy wektor F_i w postaci dywergencji pewnego tensora σ_{ij}

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{12}$$

Wtedy z równań (11) i (12)

$$\int_{V_0} F_i dV = \int_{V_0} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, dV = \oint_{S_0} \sigma_{ij}\, dS_j \tag{13}$$

Tensor σ_{ij} – **tensor napięć**. W (13) wykorzystano twierdzenie Gaussa.

$\sigma_{ij}\, dS_j$ – i-składowa siły działającej na element powierzchni dS_j. Jeśli elementy powierzchni są wybrane w płaszczyznach xy, yz, xz, to σ_{xx}, σ_{yx}, σ_{zx} są składowymi siły, działającej na jednostkę powierzchni yz.

Moment sił, działających na objętość V_0 jest $\vec{M} = \int_{V_0} (\vec{F} \times \vec{r})\, dV$. Możemy go przedstawić w postaci tensora antysymetrycznego M_{ij} [1]

$$M_{ij} = \int_{V_0} (F_i x_j - F_j x_i)\, dV \tag{14}$$

$$= \int_{V_0} \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} x_j - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} x_i \right) dV \tag{15}$$

$$= \int_{V_0} \frac{\partial (\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)}{\partial x_k}\, dV - \int_{V_0} \left(\sigma_{ik} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} - \sigma_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) dV \tag{16}$$

$$= \int_{V_0} \frac{\partial (\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)}{\partial x_k}\, dV - \int_{V_0} \left(\sigma_{ik}\, \delta_{jk} - \sigma_{jk}\, \delta_{ik} \right) dV \tag{17}$$

$$= \int_{V_0} \frac{\partial (\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)}{\partial x_k}\, dV - \int_{V_0} \left(\sigma_{ij} - \sigma_{ji} \right) dV \tag{18}$$

Tensor M_{ij} może być przedstawiony jak całka powierzchniowa tylko wtedy gdy $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ – tensor σ_{ij} *powinien być symetrycznym*. Wtedy wykorzystując twierdzenie Gaussa dostajemy

$$M_{ij} = \oint_{S_0} (\sigma_{ik} x_j - \sigma_{jk} x_i)\, dS_k \tag{19}$$

[1] Związek tensora M_{ij} z wektorem M_i: $M_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}$. Wektor M_i nazywa się *dualnym* do tensora M_{ij}.

Przy wszechstronnym ściskaniu ciała

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{20}$$

gdzie p - ciśnienie.

W stanie równowagi $F_i = 0$, tzn.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{21}$$

Jeśli ciało znajduje się w polu siły ciężkości, to w stanie równowagi $\vec{F} + \rho\vec{g} = 0$, tzn.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \tag{22}$$

Równanie (22) jest **równaniem równowagi**.

Praca wykonywana przy małym odkształceniu

$$\delta R = -\sigma_{ij}\,\delta u_{ij} \tag{23}$$

Zmiana energii wewnętrznej przy odkształceniu

$$d\mathcal{E} = TdS + \sigma_{ij}\,du_{ij} \tag{24}$$

Zmiana energii swobodnej $\mathcal{F} = \mathcal{E} - TS$

$$d\mathcal{F} = -SdT + \sigma_{ij}\,du_{ij} \tag{25}$$

Dlatego

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ij}}\right)_T \tag{26}$$

Prawo Hooke'a

Rozpatrujemy najpierw ciała izotropowe. Znajdziemy rozkład energii swobodnej względem odkształcenia u_{ij} przy malych odkształceniach.

Energia swobodna $\mathcal{F}$ jest skalarem. Dlatego rozwinięcie energii swobodnej w szereg po u_{ij}

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2 \tag{27}$$

gdzie λ i μ – **współczynniki Lamégo**.

Zmiana objętości przy odkształceniu jest u_{ii}. Jeśli $u_{ii} = 0$ to odkształcenie jest **ścinaniem prostym**. Dlatego możemy przedstawić odkształcenie w postaci sumy ścinania prostego i ściskania wszechstronnego

$$u_{ij} = \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk} \tag{28}$$

Energia swobodna (bez $\mathcal{F}_0$) może byc przedstawiona (wybraliśmy dwa niezależnych skalary)

$$\mathcal{F} = \mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{kk}^2 \tag{29}$$

gdzie K – moduł ściskania (lub **moduł ściśliwości**), μ – moduł ścinania (lub **moduł sztywności**),

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$

Powinno być $K > 0$, $\mu > 0$.

Znajdziemy zmianę (różniczkę zupełną) energii swobodnej przy małym odkształcenie

$$d\mathcal{F} = K u_{kk}\, du_{kk} + 2\mu \left(u_{ij} - \tfrac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij}\right) d\left(u_{ij} - \tfrac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij}\right) \tag{30}$$

$$= K u_{kk}\, du_{kk} + 2\mu \left(u_{ij} - \tfrac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij}\right) du_{ij} \tag{31}$$

$$= \left[K u_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \tfrac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij}\right)\right] du_{ij} \tag{32}$$

Stąd przedstawimy tensor napięć przez tensor odkształceń dla ciała izotropowego

$$\sigma_{ij} = \frac{d\mathcal{F}}{du_{ij}} = K u_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\, u_{kk}\, \delta_{ij}\right) \tag{33}$$

Odwrotny wzór

$$u_{ij} = \frac{1}{9K}\, \delta_{ij}\, \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\, \delta_{ij}\right) \tag{34}$$

stanowi **prawo Hooke'a** – odkształcenie jest proporcjonalne do napięcia.

Przykład

Przy jednorodnym ściskaniu

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} \tag{35}$$

gdzie p - cisnienie.

Po podstawieniu (35) do (34) dostajemy odkształcenie

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}$$

Wielkość $1/K$ – **współczynnik ściskania wszechstronnego** (lub **współczynnik ściśliwości**)

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{36}$$

Odkształcenia jednorodne

Przy odkształceniu jednorodnym tensor napięć jest stałym w objętości ciała.

Rozpatrujemy proste rozciąganie pręta wzdłuż osi z. Wszystkie składowe tensora σ_{ij} prócz σ_{zz} są równe zeru, $\sigma_{zz} = p$. Wykorzystując prawo Hooke'a (34) znajdziemy odkształcenie

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p, \qquad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p \tag{37}$$

W wyrażeniu dla u_{zz} (względne wydłużenie pręta) współczynnik przy p – **współczynnik rozciągania**, a wielkość odwrotna – **moduł rozciągania** albo **moduł Younga** E,

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \tag{38}$$

Współczynniki w u_{xx} i u_{yy} opisują względne ściśnięcie pręta w kierunku poprzecznym.

Stosunek ściśnięcia poprzecznego do wydłużenia podłużnego – **współczynnik Poissona** σ

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \qquad \sigma = \frac{1}{2}\,\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \tag{39}$$

Względny wzrost objętości pręta podczas rozciągania

$$u_{ii} = \frac{p}{3K} \tag{40}$$

Związek E, σ ze współczynnikami Lamégo

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{41}$$

Tensor odkształcenia u_{ij} przy małych napięciach niejednorodnych (tzn. prawo Hooke'a) może być przedstawiony za pomocą modułu Younga E i współczynnika Poissona σ

$$u_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\sigma)\, \sigma_{ij} - \sigma\, \sigma_{kk}\, \delta_{ij} \right] \tag{42}$$

Odwrotny do (42) wzór: tensor napięć σ_{ij} w przypadku małych odkształceń niejednorodnych

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left[u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\, u_{kk}\, \delta_{ij} \right] \tag{43}$$

Równania równowagi ciał izotropowych

Do równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \tag{44}$$

podstawiamy tensor napięć (43)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{kk}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} \tag{45}$$

Dalej do tych równań podstawiamy tensor odkształcenia

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{46}$$

W wyniku dostajemy równanie równowagi

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \rho g_i = 0 \tag{47}$$

W oznaczeniach wektorowych

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \to \Delta \vec{u}, \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \operatorname{div} \vec{u} \tag{48}$$

równanie równowagi (47) przyjmują postać

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = -\rho \vec{g} \, \frac{2(1+\sigma)}{E} \tag{49}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = \Delta\vec{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} \tag{50}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} a = \Delta a \tag{51}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} a = 0 \tag{52}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \tag{53}$$

Skorzystamy się ze wzoru (50) i dostajemy z równania (49)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = -\rho\vec{g}\,\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \tag{54}$$

W prawej części (54) znajduje się siła spowodowana działaniem sił ciężkości – **siła objętościowa**.

W przypadku, gdy odkształcenie powodowane jest przez siły przyłożone do powierzchni ciała, tzn. nie ma sił objętościowych, równanie równowagi przyjmuje postać

$$2(1-\sigma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - (1-2\sigma)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \tag{55}$$

Siły zewnętrzne pojawiają się tylko za pośrednictwem warunków brzegowych.

Stosujemy do (55) operator div i skorzystamy się z równań $\operatorname{div}\operatorname{grad} a = \Delta a$ i $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b} = 0$. Dostajemy

$$\Delta\operatorname{div}\vec{u} = 0 \tag{56}$$

W matematyce funkcja $\vec{f}(\vec{r})$, dla której $\Delta\vec{f} = 0$ jest nazywana **funkcją harmoniczną**. Dlatego wielkość $\operatorname{div}\vec{u}$ określająca zmianę objętości w wyniku odkształcenia jest funkcją harmoniczną.

Natomiast stosując do (49) (bez prawej części) operator Laplace'a Δ i korzystając z (56), otrzymujemy równanie równowagi w postaci

$$\Delta\Delta\,\vec{u} = 0 \tag{57}$$

Widzimy za tym, iż w stanie równowagi wektor odkształcenia spełnia **równanie biharmoniczne**.

Własności sprężyste kryształów

Ogólne wyrażenie dla energii swobodnej kryształu anizotropowego

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\,\lambda_{iklm}\,u_{ik}\,u_{lm} \tag{58}$$

gdzie λ_{iklm} – **tensor modułów sprężystości**.

Własności symetrii, związane z symetrią tensora odkształcenia $u_{ik} = u_{ki}$ oraz symetrią samego wyrażenia dla energii swobodnej $\mathcal{F}$

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik} \tag{59}$$

Tensor napięć

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm}\,u_{lm} \tag{60}$$

Symetria kryształów prowadzi do zmniejszenia niezależnych składowych tensora modułów sprężystości.

Na przykład, w **układzie regularnym** (kryształy o symetrii kubicznej) jest tylko 3 niezależnych składowych i wyrażenie na energią swobodną kryształów układu regularnego ma postać

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\,\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy}(u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + 2\lambda_{xyxy}(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2) \tag{61}$$

Fale sprężyste w ośrodku izotropowym

Równanie ruchu ośrodku izotropowego

$$\rho\, \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{62}$$

albo, wykorzystując wyrażenie (47) dla siły w prawej części równania (62),

$$\rho\, \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\, \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\, \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \vec{u} \tag{63}$$

Rozpatrujemy płaską falę sprężystą, tzn. $\vec{u}(x,t)$ - przemieszczenie nie zależy od y i od z

$$\rho\, \ddot{u}_x = \left[\frac{E}{2(1+\sigma)} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \tag{64}$$

$$\rho\, \ddot{u}_y = \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \qquad \rho\, \ddot{u}_z = \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \tag{65}$$

albo

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \tag{66}$$

$$\frac{\partial^2 u_{y,z}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_{y,z}}{\partial t^2} = 0 \tag{67}$$

gdzie

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \tag{68}$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} \tag{69}$$

– podłużna i poprzeczna prędkości dźwięku, $c_l > c_t$.

Rozwiązaniem równań (68) i (69) jest

$$u_i(x,t) = u_{0i}\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{70}$$

Wzór (70) jest równaniem fali. Po podstawieniu (70) do (66) dostajemy dla podłużnej fali

$$(c_l^2 k_l^2 - \omega^2)\, u_x = 0 \tag{71}$$

czyli $\underline{\omega = c_l k_l}$.

Dla poprzecznej fali podstawiamy (70) w (67)

$$(c_t^2 k_t^2 - \omega^2)\, u_{y,z} = 0 \tag{72}$$

czyli $\underline{\omega = c_t k_t}$.

W ośrodku anizotropowym

$$\rho\,\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \qquad \sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} \tag{73}$$

Przy podstawieniu σ_{ik} w równanie ruchu dostajemy

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} = \frac{\lambda_{iklm}}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \tag{74}$$

$$= \frac{1}{2}\,\lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{1}{2}\,\lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \tag{75}$$

albo

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \tag{76}$$

Podstawiamy

$$u_i(x, t) = u_{0i} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{77}$$

do (76) i dostajemy

$$\rho\omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m \tag{78}$$

albo

$$\left(\rho\omega^2 \delta_{im} - \lambda_{iklm} k_k k_l\right) u_m = 0 \tag{79}$$

Rozwiązanie układu równań (79) będzie niezerowe przy spełnieniu warunku

$$\det\left(\lambda_{iklm}k_l k_m - \rho\omega^2\delta_{im}\right) = 0 \tag{80}$$

Wprowadzimy oznaczenie $a_{im} = \lambda_{iklm}k_k k_l$. Odpowiednio dostajemy

$$\det\left(\begin{array}{ccc} a_{xx} - \rho\omega^2 & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} - \rho\omega^2 & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} - \rho\omega^2 \end{array}\right) = 0 \tag{81}$$

– równania 3-go rzędu dla ω^2. Pierwiastki tego równania prowadzą do trzech różnych gałęzi zależności $\omega(\vec{k})$. Przy tym dla wszystkich tych gałęzi $\omega(k \to 0) = 0$.

Prędkość grupowa fali

$$\vec{u} = \frac{\partial\omega(\vec{k})}{\partial\vec{k}} \tag{82}$$

$\Rightarrow$ Mogą istnieć 3 różnych fali sprężyste, w których mogą być różne prędkości. Fala może być nie czysto poprzeczna lub czysto podłużna.

Odkształcenia przy zmianie temperatury

Energia swobodna jako funkcja temperatury przy odkształceniu

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0)\, u_{ll} + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\, u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2}\, u_{ll}^2 \tag{83}$$

gdzie μ - moduł ścinania, K - moduł wszechstronnego ściśnienia, α – współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Tensor napięcia

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T = -K\alpha(T - T_0)\,\delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\, u_{ll} \right) + K u_{ll}\delta_{ik} \tag{84}$$

Przy swobodnym rozszerzeniu cieplnym nie powinno być wewnętrznych napięć, $\sigma_{ik} = 0$. Z tego wynika, że $u_{ik} = \mathrm{const}\,\delta_{ik}$ i

$$u_{ll} = \alpha\,(T - T_0) \tag{85}$$

Równanie równowagi niejednorodnie ogrzewanego ciała

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u} - \frac{3(1-\sigma)}{2(1+\sigma)}\,\mathrm{rot\,rot}\,\vec{u} = \alpha \mathrm{grad}\, T \tag{86}$$

Równanie (86) ma rozwiązanie z $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ i

$$\mathrm{div}\, u = \frac{\alpha(1+\sigma)(T - T_0)}{3(1-\sigma)} \tag{87}$$

Przewodnictwo cieplne ciał stałych

Ilość ciepła absorbowanego w jednostkę czasu jest równa $T\frac{\partial S}{\partial t}$.

Równanie ciągłości dla ilości ciepła

$$T\,\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{q} \tag{88}$$

gdzie $\vec{q}$ - gęstość strumienia ciepła,

$$\vec{q} = -\kappa\,\nabla T \tag{89}$$

κ – współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Z równania (83) znajdziemy entropię z dokładnością do członów 1-go rzędu po u_{ik}

$$S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = S_0(T) + K\alpha u_{ll} \tag{90}$$

i podstawiamy (90) do (88), przyjmując $\kappa = \mathrm{const}$

$$T\,\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha K T\,\frac{\partial u_{ll}}{\partial t} = \kappa\,\Delta T \tag{91}$$

Pochodna od S_0 po t może być zapisana jak

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{92}$$

Pochodna $\partial S_0/\partial T$ jest liczona przy $u_{ii} = \operatorname{div}\vec{u} = 0$, tzn. przy stałej objętości, czyli

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial T}\right)_V = \frac{C_v}{T} \tag{93}$$

Dostajemy równanie

$$C_v\,\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha K T\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u} = \kappa\,\Delta T \tag{94}$$

które mieści rozszerzenie $\operatorname{div}\vec{u}$ jako funkcję od T dla niejednorodnie ogrzewanego ciała.

Teraz skorzystamy się z równania (87) dla $\operatorname{div}\vec{u}$ w niejednorodnym polu temperaturowym. W wyniku dostajemy równanie przewodnictwa cieplnego

$$\frac{(1+\sigma)C_p + 2(1-2\sigma)C_v}{3(1-\sigma)}\,\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\,\Delta T \tag{95}$$

Faktycznie równanie przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych zawsze można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{96}$$

gdzie χ – **współczynnik przewodnictwa temperaturowego**,

$$\chi = \frac{\kappa}{C} \tag{97}$$

(C – średnia pojemność cieplna) ponieważ $C_p \simeq C_v$ i drugi człon w (94) jest bardzo mały.

Przewodnictwo cieplne w kryształach

W ciałach anizotropowych strumień ciepła $\vec{q}$ może być w innym kierunku niż grad T. Dlatego ogólne wyrażenie jest

$$q_i = -\kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k} \tag{98}$$

gdzie κ_{ik} – tensor przewodnictwa cieplnego.

Równanie przewodnictwa ciepła (94) w kryształach przyjmuje postać

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} \tag{99}$$

Według *zasady Onsagera symetrii współczynników kinetycznych* tensor κ_{ik} jest symetrycznym, $\kappa_{ik} = \kappa_{ki}$.