

# FIZYKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

Vitalii Dugaev

*Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej  
Politechnika Rzeszowska*

---

Semestr zimowy, rok 2017/2018



## **Vitalii Dugaev**

- Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
- Bud. K, pokój 48
- E-mail [vdugaev@prz.edu.pl](mailto:vdugaev@prz.edu.pl)
- Tel. 17-865 1917

### Strony domowe:

- <http://dugaev.v.prz.edu.pl/>
- <http://vitaliidugaev.sd.prz.edu.pl/>
- [www.prz.edu.pl/~vdugaev](http://www.prz.edu.pl/~vdugaev)
- <http://spintronics.prz.edu.pl/>

## **Organizacja zajęć:**

- 3 god. wykłady do 12.12.2017
- Zaczynamy o 12:15
- Egzamin ustny: 2 pytania z teorii

## Fizyka ośrodków ciągłych

- Elementy hydrodynamiki
- Mechanika ciał stałych: teoria sprężystości
- Elektrodynamika ośrodków ciągłych
- Fizyka ciał skondensowanych (fizyka ciała stałego)

## Literatura

- L.D. Landau i J.M. Lifszyc. Hydrodynamika, PWN, Warszawa, 2009
- L.D. Landau i J.M. Lifszyc. Teoria sprężystości. PWN, Warszawa, 2009
- L.D. Landau i J.M. Lifszyc. Elektrodynamika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa, 2011
- C. Kittel. Wstęp do fizyki ciała stałego. PWN, Warszawa, 1999
- N.W. Ashcroft, N.D. Mermin. Fizyka ciała stałego. PWN, Warszawa, 1986
- M.P. Marder. Condensed Matter Physics. John Wiley, New York, 2000.
- J.M. Ziman. Principles of the theory of solids. Cambridge, 1964
- C. Kittel. Kwantowa fizyka ciała stałego. PWN, 1974
- R.E. Peierls. Quantum theory of solids. Oxford, 1956

# Opis mikroskopowy i makroskopowy w fizyce płynów i ciał stałych

---

- Gaz, ciecz i ciało stałe mogą być opisane **mikroskopowo i makroskopowo**
- **Opis mikroskopowy** jest związany z opisem stanu pojedynczych cząstek z których składa się ciało (gaz, ciecz, ciało stałe)
- Opis mikroskopowy stanu cząsteczki może być **klasycznym albo kwantowym**

Przykład 1: Gaz, który składa się z atomów. Stan cząsteczki opisuje się przez położenie  $\mathbf{r}$  i prędkość  $\mathbf{v}$  (albo pęd). Energia cząsteczki  $\varepsilon$  zależy od prędkości,  $\varepsilon = mv^2/2$ .

Przykład 2: Ciało stałe izolator składa się z atomów.

Przykład 3: Ciało stałe składa się z jonów i elektronów.

## Układ cząstek – statystyka klasyczna

- Cząsteczki, z których składa się ciało, tworzą układ dużej ilości cząsteczek
- **Fizyka statystyczna** opisuje układy dużej ilości cząsteczek
- W fizyce statystycznej wprowadzono pojęcie **funkcji rozkładu**  $f(s)$  – opisuje prawdopodobieństwo tego, że dowolnie wybrana cząsteczka znajduje się w stanie  $s$ .
- Funkcja rozkładu w stanie równowagowym zależy od energii  $E_n$  układu w stanie  $n$
- **Rozkład Gibbsa** - prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie  $n$ :

$$w_n = A \exp[-E_n/kT], \quad A - \text{stała}$$

- **Klasyczny rozkład Maxwella**

$$f(v) \sim \exp(-mv^2/2kT)$$

## Funkcja rozkładu

$f(s)$  – prawdopodobieństwo tego, że cząsteczka znajduje się w stanie  $s$   
Unormowanie:

$$\sum_s f(s) = 1$$

Przykład: Cząsteczka w 3D przestrzeni.

Prawdopodobieństwo tego, że cząsteczka znajduje się w elemencie objętości  $dx dy dz$  w punkcie  $\mathbf{r}$

$$f(\mathbf{r}) dx dy dz$$

Jednoatomowy gaz może być opisany przez funkcję rozkładu  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$



## Rozkład Maxwella

**W stanie równowagi** – gaz jednorodny i nie zależy od czasu  
Funkcja rozkładu

$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}$$

Prawdopodobieństwo tego, że cząsteczka ma prędkość w objętości  $d^3\mathbf{v}$  przestrzenie fazowej

$$f(v)d^3\mathbf{v}$$

Unormowanie:

$$\int d^3\mathbf{v} f(v) = 1 \quad d^3\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$$
$$\int d^3\mathbf{v} \dots = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \dots$$

## Układ cząstek – statystyka kwantowa

- Układ cząstek ze spinem połówkowym (fermionów) w stanie równowagowym opisuje **statystyka kwantowa Fermiego-Diraca**

$$f(v) = \frac{1}{e^{(mv^2/2 - \mu)/kT} + 1}$$

- Układ cząstek ze spinem całkowitym (bozonów) w stanie równowagowym opisuje **statystyka kwantowa Bosego-Einsteina**

$$f(v) = \frac{1}{e^{(mv^2/2 - \mu)/kT} - 1}$$

# Równanie kinetyczne Boltzmann dla funkcji rozkładu w stanie nierównowagowym

Równanie kinetyczne dla gazu bez zderzeń cząsteczek

$$\frac{df}{dt} = 0$$

Przy istnieniu zderzeń

$$\frac{df}{dt} = Z d f$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \\ & = \int d^3 \mathbf{v}' \{ w(\mathbf{v}', \mathbf{v}) f(\mathbf{v}') [1 - f(\mathbf{v})] - w(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f(\mathbf{v}) [1 - f(\mathbf{v}')] \} \end{aligned}$$

$w(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  – prawdopodobieństwo tego, że przy zderzeniu prędkość cząsteczki zmienia się od  $\mathbf{v}$  do  $\mathbf{v}'$

Przyjmujemy do uwagi, że

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}$$

$$w(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = w(\mathbf{v}', \mathbf{v})$$

Dostajemy równanie kinetyczne Boltzmannna

$$\frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \int d^3 \mathbf{v}' w(\mathbf{v}', \mathbf{v}) [f(\mathbf{v}') - f(\mathbf{v})]$$

Równanie kinetyczne daje ***mikroskopowy opis ewolucji stanu gazu***

## Równania makroskopowe

Gęstość rozkładu czastek

$$N(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

Prędkość makroskopowego ruchu czastek  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

Bez zewnętrznego pola  $\mathbf{F}=0$ .

Równanie kinetyczne

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha f) = \mathcal{Z}d f$$

$$\mathcal{Z}d f = \int w (f' - f) d\Gamma'$$

$$f = f(\mathbf{v}), f' = f(\mathbf{v}')$$

$$d\Gamma = d^3\mathbf{v}, d\Gamma' = d^3\mathbf{v}'$$

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x_\alpha y_\alpha \equiv \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$$

Dla zderzeniowej części zmian

$$\int (Zd f) d\Gamma = 0, \quad \int \varepsilon (Zd f) d\Gamma = 0, \quad \int \mathbf{v} (Zd f) d\Gamma = 0,$$

Przemnożymy równanie kinetyczne na masę cząsteczki  $m$  i scałkujemy względem  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \int d\Gamma m \frac{\partial f}{\partial t} + \int d\Gamma m \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\alpha f &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} m \int d\Gamma f + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} m \int d\Gamma v_\alpha f &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} mN + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} mNV_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

**Równanie ciągłości**  
(zasada zachowania  
masy gazu):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0$$

$\rho = mN$   
gęstość

Przemnożymy równanie kinetyczne na pęd cząsteczki  $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$  i scałkujemy względem  $\Gamma$

$$\int d\Gamma m v_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} + \int d\Gamma m v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} v_{\beta} f = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m \int d\Gamma v_{\alpha} f + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \int d\Gamma m v_{\alpha} v_{\beta} f = 0$$



**Zasada zachowania pędu**

$$\frac{\partial \rho V_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \Pi_{\alpha\beta} = 0$$

**Tensor gęstości strumienia pędu**

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int m v_{\alpha} v_{\beta} d\Gamma$$

Składowa  $\Pi_{\alpha\beta}$  tego tensora jest składową  $\alpha$  pędu przenoszonego w 1s przez cząsteczki przepływające przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do osi  $x_{\beta}$ .

Przemnożymy równanie kinetyczne na energię cząsteczki  $\varepsilon$  i scałkujemy względem  $\Gamma$

$$\int d\Gamma \varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} + \int d\Gamma \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\alpha f = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d\Gamma \varepsilon f + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int d\Gamma \varepsilon v_\alpha f = 0$$



**Zasada zachowania energii**

$$\frac{\partial(N\bar{\varepsilon})}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q} = 0$$

Średnia energia  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \int \varepsilon d\Gamma$

**Gęstość strumienia energii w gazie**

$$\mathbf{q} = \int \varepsilon \mathbf{v} f d\Gamma$$



# Skalary, wektory, tensory

**Skalar** - wielkość, która nie zmienia się przy przekształceniach przestrzeni

Przykład: temperatura  $T$

**Wektor** w przestrzeni 3D – ma 3 składowych, które zmieniają się w pewny sposób przy przekształceniach przestrzeni.

Przykład: wektor prędkości  $\mathbf{v}$ , który ma 3 składowe  $v_x, v_y, v_z$ . Przy obrocie układu współrzędnych w płaszczyźnie  $x$ - $y$  na kąt  $\varphi$  odbywa się zmiana składowych:

$$v'_x = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi$$

$$v'_y = -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi$$

$$v'_z = v_z$$

albo

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Można przedstawić transformację obrotu w postaci

$$\mathbf{v}' = \hat{A} \mathbf{v}$$

gdzie  $\hat{A}$  - ortogonalna macierz transformacji

$$\hat{A}^T \hat{A} = 1$$

**Tensor** 2-go rzędu w 3D przestrzeni ma 9 składowych.  
Przykład: przewodnictwo półprzewodnika

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Składowe tensora 2-go rzędu transformują się jak iloczyn składowych dwóch wektorów.

Na przykład, dla obrotu wokół osi z

$$\sigma'_{xy} = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_{yx} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi$$