

FIZYKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

Vitalii Dugaev

*Katedra Fizyki i Inżynierii Medycznej
Politechnika Rzeszowska*

Semestr zimowy, rok 2017/2018



Stałe pole magnetyczne w ośrodku ciągłym

Uśrednienie równań Maxwella dla pola magnetycznego

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}$$

gdzie $\rho \mathbf{v}$ – gęstość prądu mikroskopowego.

Zakładamy, że średnia gęstość prądu mikroskopowego może być przedstawiona

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$$

gdzie \mathbf{M} – wektor magnetyzacji (namagnesowania)

Otrzymujemy

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

gdzie \mathbf{H} – natężenie pola magnetycznego, które jest związane z indukcją magnetyczną \mathbf{B} równaniem

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$$

Znalazłyśmy równania stałego pola magnetycznego

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

Znajdziemy całkowity moment magnetyczny, utworzony wszystkimi cząstkami naładowanymi, które ruszą się w ciałach stałych

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{1}{2c} \int_{V_0} (\mathbf{r} \times \overline{\rho \mathbf{v}}) dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} (\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{M}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_0} (\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})) dV \end{aligned}$$

gdzie objętość V_0 obejmuje ciało.

Równanie dla momentu magnetycznego w składowych

$$\mathcal{M}_i = \frac{1}{2} \int_{V_0} (\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}))_i dV$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_i &= \frac{1}{2} \int_{V_0} (\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}))_i dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} \epsilon_{ijk} r_j (\nabla \times \mathbf{M})_k dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_0} \epsilon_{ijk} r_j \epsilon_{klm} (\nabla_l M_m) dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} \epsilon_{ijk} r_j \epsilon_{lmk} (\nabla_l M_m) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_0} [r_j (\nabla_i M_j) - r_j (\nabla_j M_i)] dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_0} [\nabla_i (r_j M_j) - M_j (\nabla_i r_j) - \nabla_j (r_j M_i) + M_i (\nabla_j r_j)] dV \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_{S_0} r_j M_j dS_i - \int_{V_0} M_i dV - \int_{S_0} r_j M_i dS_j + 3 \int_{V_0} M_i dV \right\} \\
&= \int_{V_0} M_i dV
\end{aligned}$$

(ϵ_{ijk} – antysymetryczny tensor jednostkowy; na powierzchni S_0 nie ma namagnesowania) tzn., że \mathbf{M} jest **momentem magnetycznym jednostki objętości ciała**

W ciałach izotropowych namagnesowanie jest proporcjonalne do natężenia pola \mathbf{H}

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$$

gdzie χ – **podatność magnetyczna**

Przy podstawieniu do równania $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ dostajemy

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

gdzie μ – **przenikalność magnetyczna substancji**

$$\mu = 1 + 4\pi\chi$$

Jeśli w przewodniku istnieje niezerowy makroskopowy prąd \mathbf{j} , to równania dla stacjonarnego natężenia pola \mathbf{H} i indukcji magnetycznej \mathbf{B} przyjmują postać

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Matematyka: antysymetryczny wektor jednostkowy

Definicja

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}, \quad \epsilon_{xyz} = 1$$

Właściwości

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$$

Uproszczenie przy przemnożeniu

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Zastosowanie

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \rightarrow c_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$$

$$\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{b}, \rightarrow a_i = \epsilon_{ijk}\nabla_j b_k$$

Struktura krystaliczna

- Kryształ – uporządkowany okresowo w przestrzeni trójwymiarowej zbiór atomów
- W 1912 r. Laue złożył pracę pt. „Efekty interferencyjne promieni rentgenowskich” – omawia podstawy teorii dyfrakcji promieni rentgenowskich na periodycznie uporządkowanych atomach
- Pierwsze określenie struktury kryształu na podstawie analizy obrazu dyfrakcyjnego: W. Bragg (1913)

Periodyczne uporządkowanie atomów

- Idealny kryształ tworzy się przez nieskończone regularne powtarzanie się w przestrzeni identycznych elementów strukturalnych o kształcie równoległościanów
- W najprostszycch kryształach jak miedź, złoto i metali alkaliczne jednostką strukturalną jest pojedynczy atom
- Na ogół jednostka strukturalna zawiera kilka atomów lub cząsteczek
- Strukturę wszystkich kryształów opisujemy na podstawie modelu pojedynczej sieci periodycznej, zawierającej grupy atomów związanej z każdym węzłem sieci lub umieszczoną w każdym podstawowym równoległościanie. Tę grupę atomów nazywamy **bazą**
- ***Baza jest elementem kryształu powtarzającym się w przestrzeni***

Wektory translacji kryształu i sieci krystalicznej

- Doskonały kryształ składa się z uporządkowanych atomów w **sieci krystalicznej** opisanej przez trzy podstawowe wektory translacji **a, b, c**

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c} \quad (1)$$

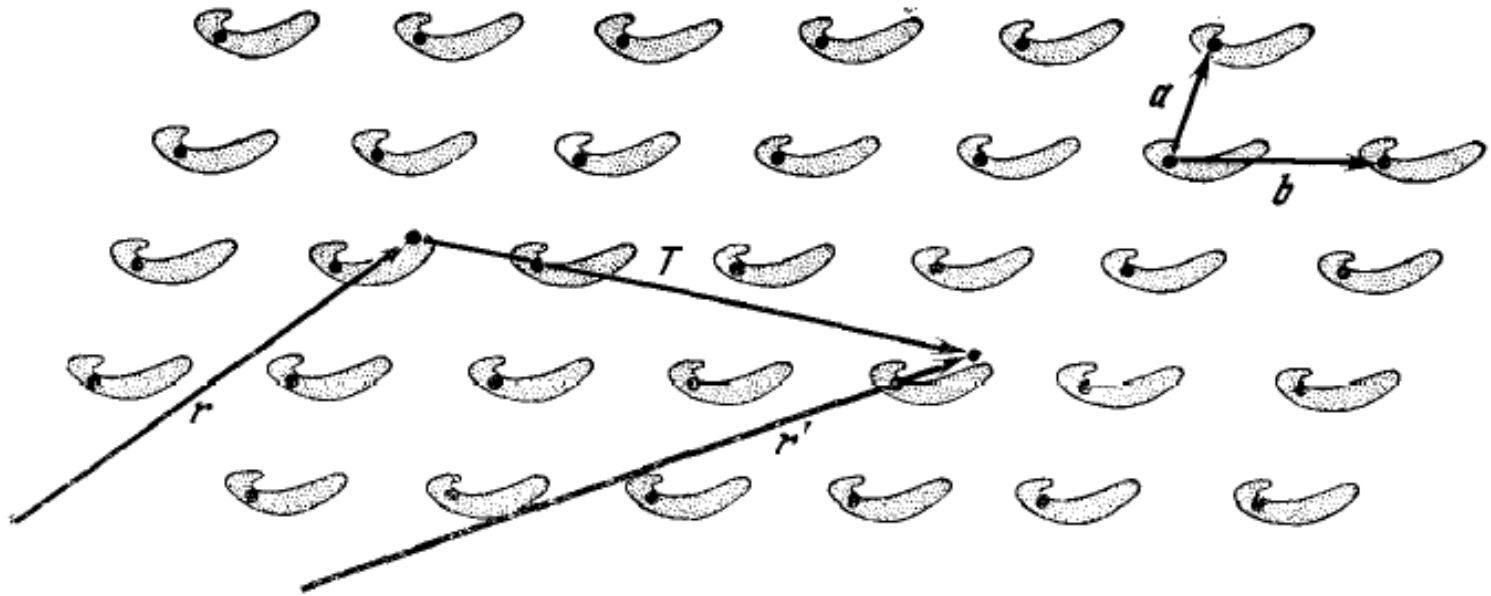
gdzie n_1, n_2, n_3 są dowolnymi liczbami całkowitymi

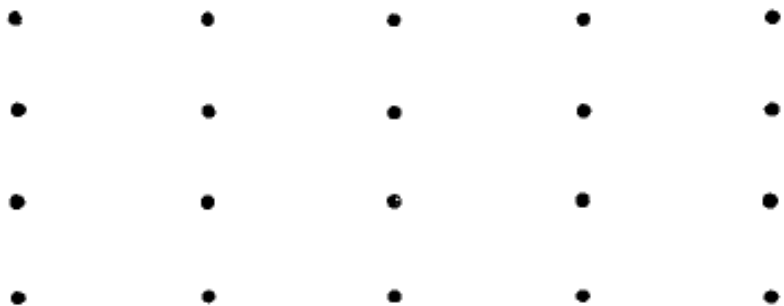
- Zbiór punktów \mathbf{r}' określonych taką zależnością dla wszystkich wartości liczb całkowitych n_1, n_2, n_3 definiuje **sieć krystaliczną**
- **Sieć jest regularnym i periodycznym układem punktów w przestrzeni**
- Sieć i wektory translacji $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nazywamy **prostymi**, jeśli dowolne dwa punkty \mathbf{r}, \mathbf{r}' , z których układ atomów wygląda zawsze tak samo, spełniają (1) w wypadku odpowiednio dobranych liczb całkowitych n_1, n_2, n_3

- Osie krystaliczne **a, b, c** wyznaczają przyległe do siebie krawędzie równoległoscianu
- Jeśli węzły sieci znajdują się tylko w narożach równoległoscianu, to mówimy o prostym równoległoscianie
- **Przekształcenie translacji** sieci lub przekształcenie translacji kryształu definiuje się jako przesunięcie równoległe kryształu względem siebie o wektor translacji kryształu

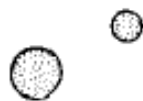
$$\mathbf{T} = n_1 \mathbf{a} + n_2 \mathbf{b} + n_3 \mathbf{c}$$

Wektor **T** łączy dwa dowolne węzły sieci

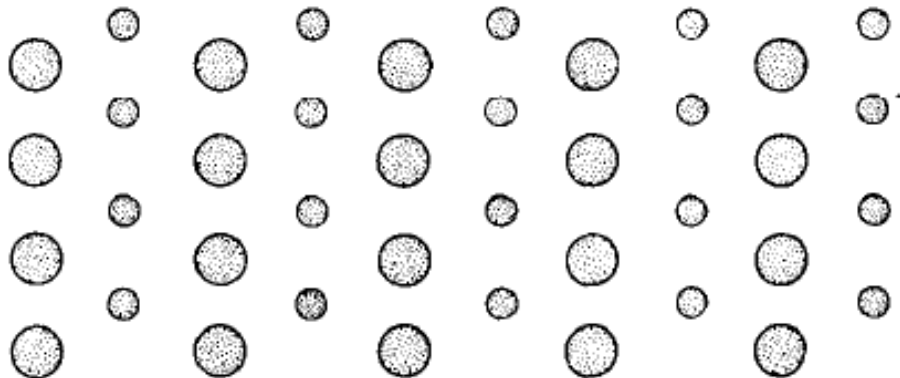




sieć przestrzenna



baza zawierająca
dwa różne jony



struktura
krystaliczna

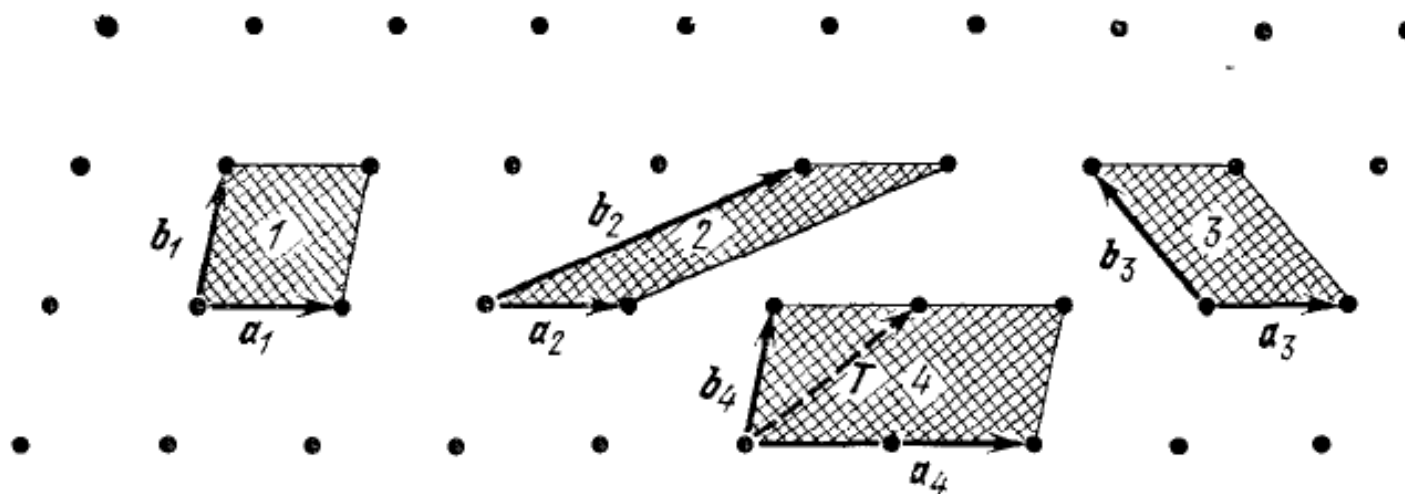
Przekształcenia symetrii

- Jednym z przekształceń symetrii są przekształcenia translacji kryształu
- Przekształcenia symetrii związane z obrotem i odbiciem są nazwane ***przekształceniami względem punktu***
- Mogą być jeszcze przekształcenia złożone, wynikłe z połączenia przekształcenia względem punktu z translacjami

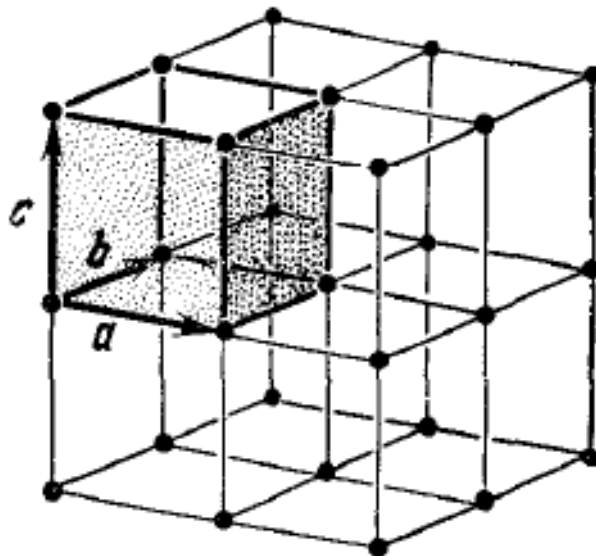
Komórka prosta sieci

- Równoległoscian opisany przez wektory **a**, **b**, **c** nazywamy **komórką prostą**, która jest jednym z typów **komórki elementarnej**
- Komórka elementarna stanowi przestrzeń powstałą z przekształceń translacji kryształu
- Komórka prosta stanowi najmniejszą jednostkę objętości komórki elementarnej
- Jeden węzeł sieci przypada na jedną komórkę prostą
- Liczba atomów w komórce prostej jest określona liczbą atomów w bazie
- Objętość komórki prostej

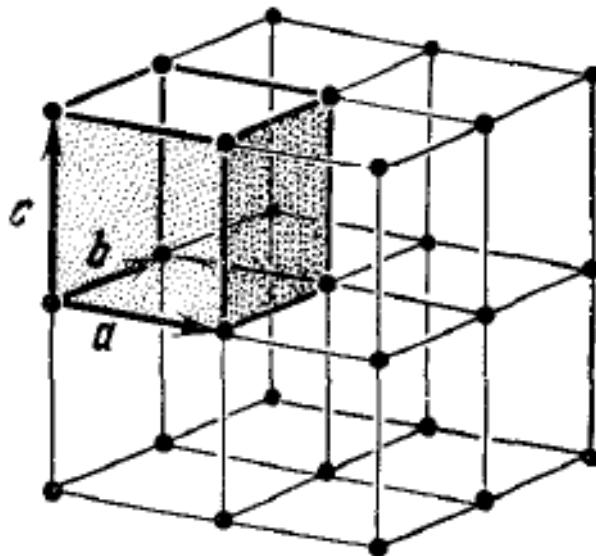
$$V_c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$$



4 nie jest komórką prostą



Komórka prosta w trójwymiarowej sieci przestrzennej



Komórka prosta w trójwymiarowej sieci przestrzennej