Rozdział 1

Fizyka ośrodków ciągłych – ćwiczenia

1.1 Wektory i macierzy

Przykład: wektor (jako objekt matematyczny)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

gdzie r_i – składowe wektora ($i = 1, 2$). Często mówimy "wektor r_i" zamiast "wektor ze składowymi r_i".

Macierz (objekt matematyczny) 2×2

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

gdzie A_{ij} jest elementem macierowym. Często mówimy "macierz A_{ij}".

Mnożenie macierzy na skalar

$$B = aA = a \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA_{11} & aA_{12} \\ aA_{21} & aA_{22} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Możemy to zapisać przez składowe $B_{ij} = aA_{ij}$.

Mnożenie macierzy na wektor

$$\mathbf{s} = A\mathbf{r} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}r_1 + A_{12}r_2 \\ A_{21}r_1 + A_{22}r_2 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Inaczej ten sam wzór przedstawiamy przez składowe

$$s_i = \sum_j A_{ij} r_j \tag{1.5}$$

albo po prostu

$$s_i = A_{ij} r_j \,, \tag{1.6}$$

gdzie wskaźnik j nazywamy "niemym", co oznacza, że mamy na myśli sumowanie po tym wskaźniku, $A_{ij}r_j \equiv \sum_j A_{ij}r_j$.

Mnożenie macierzy na macierz

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}b_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + a_{22}B_{22} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Przedstawienie przez składowe

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \tag{1.8}$$

Macierz odwrotna

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

gdzie wyznacznik

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \tag{1.10}$$

Macierz odwrotna została wyznaczona w taki sposob, że $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ – macierz jednostkowa

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Macierz jednostkowa może byc napisana jak $\mathbb{1}_{ij} = \delta_{ij}$, gdzie

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \tag{1.12}$$

jest symbolem Kroneckera.

1.2 Wektory i tensory

Wektor fizyczny (w trójwymiarowej przestreni)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

może być napisany jak r_i, gdzie $i = x, y, z$, przy tym $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$.

Tensor 2-go rzędu (w trójwymiarowej przestrzeni) można przedstawić w postaci macierzy 3×3

$$a = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

albo jak a_{ij}, gdzie $i, j = x, y, z$.

Przedstawienie fizycznych wektorów i tensorów zależy od wyboru układu współrzędnych. Przy transformacji układu (na przykład, przy obrotach wokół pewnej wybranej osi) zmieniają się składowe fizycznego wektora i tensora.

W dwuwymiarowej (2D) przestrzeni wszytko będzie tak samo, ale $i = x, y$, gdzie x, y – współrzędne w 2D przestrzeni.

1.3 Mnożenie wektorów

Mnożenie skalarne dwóch wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i\, b_i \tag{1.15}$$

(jak umowiliśmy, opuszczamy znak sumowania po i).

Mnożenie wektorowe

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{1.16}$$

może być napisano przez składowe

$$c_i = \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k\,, \tag{1.17}$$

gdzie ϵ_{ijk} jest jednostkowym zupełnie antysymetrycznym tensorem 3-go rzędu (symbol Levi-Civita), który jest zdefinowany tak, że $\epsilon_{xyz} = 1$, natomiast wszystkie inne składowe są równe +1 albo −1 w zależności od tego, czy ciąg wskaźników ijk może być sprowadzony do ciągu xyz za pomocą parzystej czy nieparzystej liczby transpozycji. Na przykład, $\epsilon_{yxz} = -1$. Także można upewnić się, że $\epsilon_{yzx} = \epsilon_{zxy} = 1$.

Ważne wzory:

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \tag{1.18}$$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{1.19}$$

Przykładowe zadanie:

Przedstawić równanie wektorowe $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ przez składowe

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} d_i &= \epsilon_{ijk}\,a_j\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \epsilon_{ijk}\,a_j\,\epsilon_{klm}\,b_l\,c_m = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk}\,a_j\,b_l\,c_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,a_j\,b_l\,c_m = b_i\,a_j\,c_j - c_i\,a_j\,b_j \end{aligned} \tag{1.20}$$

1.4 Operatory różniczkowania wektorowego

Wprowadzimy operatory różniczkowania wektorowego (gradient, dywergencja, rotacja) dla skalarnej funkcji $\varphi(\mathbf{r})$ i wektorowej funkcji $\mathbf{g}(\mathbf{r})$

$$\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r}) = \nabla_i\varphi(\mathbf{r}) \tag{1.21}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla_i g_i(\mathbf{r}) \tag{1.22}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \epsilon_{ijk}\nabla_j g_k(\mathbf{r}) \tag{1.23}$$

gdzie $\boldsymbol{\nabla}$ (nabla) - operator ze skladowymi

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.24}$$

Przedstawienie tego wektora przez składowe: wektor ∇_i, gdzie $i = x, y, z$.

Operator Laplace'a

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \nabla_i \nabla_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.25}$$